ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИИ

УДК 517.375

КИНЕТИКА РОСТА «ГОРЯЧЕЙ» ТРЕЩИНЫ

В. Д. Кулиев, А. К. Курбанмагомедов

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

В статье определено поле напряжений и деформаций для задачи K_0-класса для прямоугольника с центральной трещиной нормального разрыва. Определен коэффициент интенсивности напряжений K_I и дан анализ.

The article has directly determined the field of stress and strain for the K_0-class sum for a rectangle with a central crack of normal divide. The stress intensity factor K_I has been found and analyzed.

Ключевые слова: смещения; напряжения; коэффициент интенсивности напряжений; начальные условия; условие непрерывности.

Keywords: offset voltage; stress intensity factor; initial conditions; the condition of continuity and others.

§ 1. Начальные условия, условия непрерывности и условия на бесконечности в задаче K_0

Сформулируем условия для рассматриваемой задачи (см. § 2 в [1]).

I. Начальные условия:

$$\varepsilon_x\Big|_{t=0} = \begin{cases} \alpha T_0, & если \quad (x,y) \in \overline{S}^+, \\ 0, & если \quad (x,y) \notin \overline{S}^+; \end{cases} \tag{1}$$

$$\varepsilon_y\Big|_{t=0} = \begin{cases} \alpha T_0, & если \quad (x,y) \in \overline{S}^+, \\ 0, & если \quad (x,y) \notin \overline{S}^+. \end{cases} \tag{2}$$

В любой точке $(x,y) \in E_2$ выполняются также условия

$$\gamma_{xy}\Big|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_x\Big|_{t=0} = 0, \quad \sigma_y\Big|_{t=0} = 0, \quad \tau_{xy}\Big|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

II. Условия непрерывности:

1°. На границе L области S^+ нет скачка смещения.

2°. На границе L области S^+ напряжения не терпят разрыв.

III. Условия на бесконечности.

Смещения, напряжения и главный вектор сил (а также вращение) в бесконечно удаленной точке полагаем равными нулю.

Из условий непрерывности и из (34) в [1] следует, что компоненты смещения u и υ должны принадлежать классу функций $C^{(3)}(E_2)$. Для того чтобы удовлетворить требованиям $u \in C^{(3)}(E_2)$ и $\upsilon \in C^{(3)}(E_2)$, необходимо:

1. Провести регуляризацию функции $F(x,y)$ в E_2. Процедура регуляризации подробно обсуждалась в лемме § 4 в [1]. Напомним, в частности, что функция $F_h(x,y)$, получаемая посредством регуляризации, обладает следующими свойствами:

1°. Функция $F_h(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные производные (в обычном смысле) любого порядка в E_2.

2°. Все производные функции $F_h(x,y)$ равны нулю везде, за исключением точек внутри достаточно узких полос $\Pi_j^{\pm}$ (см. рис. 2 в [1]).

Заметим также, что

$$F_h(x,y) = \begin{cases} 1, & если \ \ (x,y) \in S_\varepsilon^+, \\ 0, & если \ \ (x,y) \in S_\varepsilon^-, \end{cases} \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ − сколь угодно малая величина.

2. Решить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$\Delta T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{6}$$

если в начальный момент времени $t = 0$ область D_ε ($D_\varepsilon : |x| \le x_0 + \varepsilon, \ \ |y| \le y_0 + \varepsilon$) нагрета до температуры $T_0 F_h(x,y)$ ($T_0 \equiv const > 0$), а теплопередающая среда в остальных точках E_2 имеет нулевую начальную температуру, т.е. если

$$T(x,y,t)\Big|_{t=0} = T_0 F_h(x,y). \tag{7}$$

Решение такой задачи описывается формулой Пуассона:

$$T(x,y,t) = \frac{T_0}{4\pi at}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_h(\xi,\eta) e^{-\frac{R^2}{4at}} d\xi d\eta = \frac{T_0}{4\pi at}\int F_n(\xi,\eta) e^{-\frac{R^2}{4at}} d\xi d\eta \tag{8}$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Функция $T(x,y,t)$, определяемая формулой (8), непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка в E_2.

§ 2. Уравнения Дюгамеля − Неймана для задачи K_0 и их решение

Компоненты смещения представим в виде:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= u_1(x,y) + u_2(x,y,t), \\ \upsilon(x,y,t) &= \upsilon_1(x,y) + \upsilon_2(x,y,t). \end{aligned} \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x^*(x,y) = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}, \qquad \varepsilon_x^{**}(x,y,t) = \frac{\partial u_2(x,y,t)}{\partial x}, \\
&\varepsilon_y^*(x,y) = \frac{\partial \upsilon_1(x,y)}{\partial y}, \qquad \varepsilon_y^{**}(x,y,t) = \frac{\partial \upsilon_2(x,y,t)}{\partial y}, \\
&\gamma_{xy}^*(x,y) = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_1(x,y)}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy}^{**}(x,y,t) = \frac{\partial u_2(x,y,t)}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_2(x,y,t)}{\partial x}, \\
&e_1 = \varepsilon_x^*(x,y) + \varepsilon_y^*(x,y), \qquad \omega_1 = \frac{\partial \upsilon_1(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y}, \\
&e_2 = \varepsilon_x^{**}(x,y,t) + \varepsilon_y^{**}(x,y,t), \qquad \omega_2 = \frac{\partial \upsilon_2(x,y,t)}{\partial x} - \frac{\partial u_2(x,y,t)}{\partial y}, \\
&\sigma_x^*(x,y) = \frac{2G}{1-v} e_1 - 2G\varepsilon_y^*(x,y), \\
&\sigma_x^{**}(x,y,t) = \frac{2G}{1-v}\left[e_2 - (1+v)\alpha T(x,y,t)\right] - 2G\varepsilon_y^{**}(x,y,t),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\sigma_y^*(x,y)=\frac{2G}{1-\nu}e_1-2G\varepsilon_x^*(x,y),$$

$$\sigma_y^{**}(x,y,t)=\frac{2G}{1-\nu}\left[e_2-(1+\nu)\alpha T(x,y,t)\right]-2G\varepsilon_x^{**}(x,y,t),$$

$$\tau_{xy}^*(x,y)=G\gamma_{xy}^*(x,y),\qquad \tau_{xy}^{**}(x,y,t)=G\gamma_{xy}^{**}(x,y,t).$$

С помощью (10), (40) [1] и (10) имеем:

$$\varepsilon_x(x,y,t)=\overset{*}{\varepsilon}_x(x,y)+\overset{**}{\varepsilon}_x(x,y,t), \tag{11}$$

$$\varepsilon_y(x,y,t)=\overset{*}{\varepsilon}_y(x,y)+\overset{**}{\varepsilon}_y(x,y,t), \tag{12}$$

$$\gamma_{xy}(x,y,t)=\overset{*}{\gamma}_{xy}(x,y)+\overset{**}{\gamma}_{xy}(x,y,t), \tag{13}$$

$$\sigma_x(x,y,t)=\overset{*}{\sigma}_x(x,y)+\overset{**}{\sigma}_x(x,y,t), \tag{14}$$

$$\sigma_y(x,y,t)=\overset{*}{\sigma}_y(x,y)+\overset{**}{\sigma}_y(x,y,t), \tag{15}$$

$$\tau_{xy}(x,y,t)=\overset{*}{\tau}_{xy}(x,y)+\overset{**}{\tau}_{xy}(x,y,t), \tag{16}$$

$$\omega(x,y,t)=\omega_1(x,y)+\omega_2(x,y,t),\;\; e(x,y,t)=e_1(x,y)+e_2(x,y,t) \tag{17}$$

Здесь $\omega=\omega_z=\frac{\partial\upsilon}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$ – единственный отличный от нуля компонент тензора вращения плоской теории упругости.

Неизвестные функции, например, $u_2(x,y,t)$ и $\upsilon_2(x,y,t)$ в формуле (9), определяем из решения следующей вспомогательной задачи термоупругости.

Вспомогательная задача термоупругости. Пусть теплопроводящая, однородная и изотропная упругая среда заполняет всю плоскость E_2. Далее, пусть в начальный момент времени $t=0$ вся среда, кроме некоторой конечной односвязной области S^+, имеет нулевую температуру, а точки области S^+ нагреты до некоторой постоянной температуры $T_0>0$, т.е.

$$T(x,y,t)\Big|_{t=0}=\begin{cases}T_0, & если \quad (x,y)\in S^+,\\ 0, & если \quad (x,y)\notin \overline{S}^+.\end{cases} \tag{18}$$

Пусть односвязная область S^+ представляет собой прямоугольник со сторонами $2x_0$ и $2y_0$, а материал теплопроводящей среды здесь тот же, что и в задаче K_0, т.е. в задаче K-класса, с такой же прямоугольной областью S^+. Для того чтобы $u_2\in C^{(3)}(E_2)$ и $\upsilon_2\in C^{(3)}(E_2)$ в дальнейшем вместо начального условия (18) принимается условие (7).

Решения данной задачи должны удовлетворять следующим условиям:

1. $\lim\limits_{t\to+\infty}u_2(x,y,t)=0;\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\upsilon_2(x,y,t)=0.$

2. На границе L области S^+ нет скачка смещения.

3. На границе L области S^+ напряжения не терпят разрыв.

4. Смещения, напряжения и главный вектор сил (а также вращение) в бесконечно удаленной точке равны нулю.

В рамках гипотез Дюгамеля и Неймана при отсутствии массовых сил и других известных допущениях (см., напр., [2]), имеем:

$$\begin{gathered}
\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial e_2(x,y,t)}{\partial x}-\frac{\partial \omega_2(x,y,t)}{\partial y}=\frac{2(1+\nu)\alpha}{1-\nu}\cdot\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x},\\
\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial e_2(x,y,t)}{\partial y}+\frac{\partial \omega_2(x,y,t)}{\partial x}=\frac{2(1+\nu)\alpha}{1-\nu}\cdot\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y},\\
(t>0,\quad (x,y)\in E_2).
\end{gathered}\tag{19}$$

Здесь функция $T(x,y,t)$ определяется формулой Пуассона (8).

Искомые функции u_2 и υ_2 при $t>0$ определяются известным методом [3]. Находим:

$$u_2=-(1+\nu)\alpha a\int_t^\infty\frac{\partial T}{\partial x}d\tau,\upsilon_2=-(1+\nu)\alpha a\int_t^\infty\frac{\partial T}{\partial y}d\tau.\tag{20}$$

Найденные таким образом функции $u_2(x,y,t)$ и $\upsilon_2(x,y,t)$ удовлетворяют всем условиям вспомогательной задачи термоупругости и являются общими решениями системы уравнений (19).

Подставляя выражения (20) в (9), определяем функции $u_1(x,y,t)$ и $\upsilon_1(x,y,t)$ таким образом, чтобы удовлетворить условиям § 1. В результате получаем:

$$\begin{gathered}
u(x,y,t)=\alpha T_0 xF_h(x,y)-(1+\nu)\alpha a\int_t^\infty\frac{\partial T(x,y,\tau)}{\partial x}d\tau-(1+\nu)\alpha\frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial x},\\
\upsilon(x,y,t)=\alpha T_0 yF_h(x,y)-(1+\nu)\alpha a\int_t^\infty\frac{\partial T(x,y,\tau)}{\partial y}d\tau-(1+\nu)\alpha\frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial y}\\
\left(\left(x,y\right)\in E_2\right).
\end{gathered}\tag{21}$$

Здесь функции $\Phi_0(x,y)$ и $T(x,y,t)$ определяются соответственно формулами (11) в [1] и (8). Заметим, что $u(x,y,t)$ и $\upsilon(x,y,t)$ являются решениями следующей системы уравнений Дюгамеля − Неймана [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial e}{\partial x}-\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{2(1+\nu)\alpha}{1-\nu}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{F_1^*(x,y)}{G},\\
\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial e}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{2(1+\nu)\alpha}{1-\nu}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{F_2^*(x,y)}{G}\\
(t>0,\quad (x,y)\in E_2).
\end{gathered}\tag{22}$$

Здесь

$$e=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon(x,y,t)}{\partial y},$$

$$\omega=\frac{\partial \upsilon(x,y,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y},$$

$$F_1^*(x,y)=G\alpha T_0\left[\frac{2}{1-\nu}\left(x\frac{\partial^2 F_h}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 F_h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial F_h}{\partial x}\right)+x\frac{\partial^2 F_h}{\partial y^2}-y\frac{\partial^2 F_h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial F_h}{\partial x}\right],$$
$$F_2^*(x,y)=G\alpha T_0\left[\frac{2}{1-\nu}\left(y\frac{\partial^2 F_h}{\partial y^2}+x\frac{\partial^2 F_h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial F_h}{\partial y}\right)+y\frac{\partial^2 F_h}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 F_h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial F_h}{\partial y}\right]. \tag{23}$$

Отметим, что функции $F_j^*(x,y)$, $j=1,2$ обладают следующими свойствами (см. лемма, § 4 в [1]):

1°. Они непрерывны и имеют непрерывные производные любого порядка в E_2.

2°. Если $(x,y)\in S_\varepsilon^\pm$, то $F_j^*(x,y)=0$.

3°. Если $(x,y)\in \Pi_j^\pm$, то функции $F_j^*(x,y)$, вообще говоря, отличны от нуля.

Компоненты тензора деформации в силу соотношений (38) (см. [1]) и (21) (или (20), (9), (11)–(13)) определяются следующими формулами:

$$\varepsilon_x=\alpha T_0F_h(x,y)-(1+\nu)\alpha a\int_t^\infty\frac{\partial^2T(x,y,\tau)}{\partial x^2}d\tau-(1+\nu)\alpha\frac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial x^2}+\alpha T_0x\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial x},$$
$$\varepsilon_y=\alpha T_0F_h(x,y)-(1+\nu)\alpha a\int_t^\infty\frac{\partial^2T(x,y,\tau)}{\partial y^2}d\tau-(1+\nu)\alpha\frac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial y^2}+\alpha T_0y\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial y}, \tag{24}$$
$$\gamma_{xy}=\alpha T_0\left(x\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial y}+y\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial x}\right)-2(1+\nu)\alpha a\int_t^\infty\frac{\partial^2T(x,y,\tau)}{\partial x\partial y}d\tau-2(1+\nu)\alpha\frac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Здесь функции $\Phi_0(x,y)$ и $T(x,y,t)$ задаются формулами (11) в [1] и (8).

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что компоненты тензора малых деформаций ε_x, ε_y и γ_{xy}, определяемые формулами (26), при $t>0$ удовлетворяют условию совместности деформаций Сен-Венана (34) [1] в E_2.

Компоненты тензора напряжений в силу равенств (37) [1] и (24) (или (20), (9), (10), (14)–(16) определяются следующими формулами:

$$\sigma_x=\frac{2G\alpha T_0}{1-\nu}\left[x\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial y}\right]+2G(1+\nu)\alpha\left[a\int_t^\infty\frac{\partial^2T(x,y,\tau)}{\partial y^2}d\tau+\frac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial y^2}\right]-2G\alpha T_0y\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial y},$$
$$\sigma_y=\frac{2G\alpha T_0}{1-\nu}\left[x\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial y}\right]+ \tag{25}$$
$$+2G(1+\nu)\alpha\left[a\int_t^\infty\frac{\partial^2T(x,y,\tau)}{\partial x^2}d\tau+\frac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial x^2}\right]-2G\alpha T_0x\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial x},$$

$$\tau_{xy} = G\alpha T_0 \left[x\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial y} + y\frac{\partial F_h(x,y)}{\partial x} \right] -$$

$$-2G(1+\nu)\alpha \left[a\int_t^\infty \frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x \partial y} d\tau + \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial x \partial y} \right].$$

Здесь функции $\Phi_0(x,y)$ и $T(x,y,t)$ определены формулами (10) [1] и (8).

§ 3. Анализ решения

В силу определения и других свойств $F_h(x,y)$ из соотношений (21), (24) и (25) получаем:

1. Если $(x,y) \in S_\varepsilon^+$, то

$$u = \alpha T_0 x - (1+\nu)\alpha a\int_t^\infty \frac{\partial T(x,y,\tau)}{\partial x} d\tau - (1+\nu)\alpha \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial x}, \quad (26)$$

$$\upsilon = \alpha T_0 y - (1+\nu)\alpha a\int_t^\infty \frac{\partial T(x,y,\tau)}{\partial y} d\tau - (1+\nu)\alpha \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial y}, \quad (27)$$

$$\varepsilon_x = \alpha T_0 - (1+\nu)\alpha a\int_t^\infty \frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x^2} d\tau - (1+\nu)\alpha \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial x^2}, \quad (28)$$

$$\varepsilon_y = \alpha T_0 - (1+\nu)\alpha a\int_t^\infty \frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial y^2} d\tau - (1+\nu)\alpha \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial y^2}, \quad (29)$$

$$\gamma_{xy} = -2(1+\nu)\alpha \left[a\int_t^\infty \frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x \partial y} d\tau + \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial x \partial y} \right], \quad (30)$$

$$\sigma_x = 2G(1+\nu)\alpha \left[a\int_t^\infty \frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial y^2} d\tau + \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial y^2} \right], \quad (31)$$

$$\sigma_y = 2G(1+\nu)\alpha \left[a\int_t^\infty \frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x^2} d\tau + \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial x^2} \right], \quad (32)$$

$$\tau_{xy} = -2G(1+\nu)\alpha \left[a\int_t^\infty \frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x \partial y} d\tau + \frac{\partial^2 \Phi_0(x,y)}{\partial x \partial y} \right]. \quad (33)$$

Здесь функции $\Phi_0(x,y)$ и $T(x,y,t)$ определяются соответственно формулами (19) [1]) и (3).

2. Если $(x,y) \in S_\varepsilon^-$, то

$$u = -(1+\nu)\alpha \left[a\int_t^\infty \frac{\partial T(x,y,\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial x} \right], \quad (34)$$

$$\upsilon = -(1+\nu)\alpha \left[a\int_t^\infty \frac{\partial T(x,y,\tau)}{\partial y} d\tau + \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial y} \right], \quad (35)$$

$$\varepsilon_x = -(1+\nu)\alpha\left[a\int_t^{\infty}\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x^2}d\tau + \frac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial x^2}\right], \tag{36}$$

$$\varepsilon_y = -(1+\nu)\alpha\left[a\int_t^{\infty}\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial y^2}d\tau + \frac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial y^2}\right]. \tag{37}$$

Функции γ_{xy}, σ_x, σ_y и τ_{xy} определяются формулами (30), (31), (32) и (33), соответственно, но при этом предполагается, что $(x,y)\in S_\varepsilon^-$, а функции $\Phi_0(x,y)$ и $T(x,y,t)$ определяются формулами (11) [1] и (8).

Из выражений (21) и (25) следует, что сформулированные для рассматриваемой задачи в § 1 условия непрерывности и условия на бесконечности удовлетворяются.

Если $(x,y)\in S_\varepsilon^+$, то из выражений (26)–(33) получаем следующие значения исследуемых величин в начальный момент времени:

$$\begin{gathered} u\big|_{t=0} = \alpha T_0 x,\quad \upsilon\big|_{t=0} = \alpha T_0 y,\quad \varepsilon_x\big|_{t=0} = \alpha T_0,\quad \varepsilon_y\big|_{t=0} = \alpha T_0,\quad \gamma_{xy}\big|_{t=0} = 0, \\ \sigma_x\big|_{t=0} = 0,\quad \sigma_y\big|_{t=0} = 0,\quad \tau_{xy}\big|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Если же $(x,y)\in S_\varepsilon^-$, то, используя (34)–(37) и формулы (30)–(33), в которых полагаем, что $(x,y)\in S_\varepsilon^-$, имеем:

$$\begin{gathered} u\big|_{t=0} = 0,\quad \upsilon\big|_{t=0} = 0,\quad \varepsilon_x\big|_{t=0} = 0,\quad \varepsilon_y\big|_{t=0} = 0,\quad \gamma_{xy}\big|_{t=0} = 0, \\ \sigma_x\big|_{t=0} = 0,\quad \sigma_y\big|_{t=0} = 0,\quad \tau_{xy}\big|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{39}$$

Отметим также, что при $(x,y)\in S_\varepsilon^+$ из полученных нами выражений, (26), (27) и (33) в силу (3) [1] и (19), (20), (23) [1] следуют равенства:

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = 0,\qquad \tau_{xy}(x,y,t)\big|_{x=0} = 0, \tag{40}$$

$$\upsilon(x,y,t)\big|_{y=0} = 0,\qquad \tau_{xy}(x,y,t)\big|_{y=0} = 0. \tag{41}$$

§ 4. Коэффициент интенсивности напряжений

Формулы (31)–(33) благодаря равенству (25)–(27) [1] можно записать так:

$$\begin{gathered} \sigma_x(x,y,t) = -2G(1+\nu)\alpha a\int_0^t\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial y^2}d\tau > 0, \\ \sigma_y(x,y,t) = -2G(1+\nu)\alpha a\int_0^t\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x^2}d\tau > 0, \\ \tau_{xy}(x,y,t) = 2G(1+\nu)\alpha a\int_0^t\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x\partial y}d\tau \\ \left((x,y)\in S_\varepsilon^+\right). \end{gathered} \tag{42}$$

Учитывая, что функция $T(x,y,t)$ здесь определяется зависимостью (3) [1], на основании (42) можно сделать следующие выводы:

1°. Нормальные напряжения $\sigma_x(x,y,t)$ и $\sigma_y(x,y,t)$ при $t>0$ описываются функциями, четными и по x и по y.

2°. При прочих равных условиях напряжения $\sigma_x(x,y,t)$ и $\sigma_y(x,y,t)$ представляют собой монотонно возрастающие функции времени t, в начальный момент равные нулю (см. (38)):

$$\sigma_x(x,y,0)=0, \quad \sigma_y(x,y,0)=0. \tag{43}$$

3°. Касательное напряжение $\tau_{xy}(x,y,t)$ при $t>0$ является нечетной функцией и по x и по y.

Кроме того, нами показано, что

$$\upsilon(x,0,t)=0, \quad \tau_{xy}(x,0,t)=0$$

$$\left((x,y)\in S^{+}(\varepsilon)\right).$$

Из выражений (42) с учетом (3) [1] получаем

$$\sigma_y(x,0,t)=\frac{G(1+\nu)\alpha T_0}{2\sqrt{\pi a}}\int_0^t\left\{\frac{\left[(x_0+x)e^{\frac{-(x_0+x)^2}{4a\tau}}+(x_0-x)e^{\frac{-(x_0-x)^2}{4a\tau}}\right]erf\left(\frac{y_0}{2\sqrt{a\tau}}\right)}{\tau\sqrt{\tau}}\right\}d\tau \tag{44}$$

$$\left((x,y)\in S^{+}(\varepsilon)\right),$$

откуда с учетом (43) и (25) [1] следует, что значения $\sigma_y(x,0,t)$ заключены в промежутке $0\le\sigma_y(x,0,t)\le\sigma_{y\max}$, где

$$\sigma_{y\max}=\lim_{t\to+\infty}\sigma_y(x,0,t)=\frac{2GT_0(1+\nu)\alpha}{\pi}\left[arctg\left(\frac{y_0}{x_0+x}\right)+arctg\left(\frac{y_0}{x_0-x}\right)\right] \tag{45}$$

$$\left((x,y)\in S^{+}(\varepsilon)\right).$$

Из (44) следует, что коэффициенты интенсивности напряжений K_I^{+} и K_I^{-} для изолированной центральной трещины длины $2l\left(-x_0<-l\le x\le l<x_0, y=0\right)$ в точках $x=+l$ и $x=-l$ определяются формулой (см., напр., [2, с. 485]):

$$K_I=K_I^{-}=K_I^{+}=\frac{G(1+\nu)\alpha T_0\sqrt{l}}{\pi\sqrt{a}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\times$$

$$\times\int_0^t\left\{\frac{\left[(x_0+\xi l)e^{\frac{-(x_0+\xi l)^2}{4a\tau}}+(x_0-\xi l)e^{\frac{-(x_0-\xi l)^2}{4a\tau}}\right]erf\left(\frac{y_0}{2\sqrt{a\tau}}\right)}{\tau^{3/2}}\right\}d\tau d\xi \tag{46}$$

$$(l<x_0).$$

Отсюда следует, что при прочих равных условиях с течением времени t коэффициент интенсивности напряжений K_I увеличивается.

Из (46) при $t \to +\infty$ получаем

$$K_I^* = \lim_{t\to\infty} K_I = \frac{G(1+\nu)\alpha T_0\sqrt{l}}{\pi\sqrt{a}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left\{ \left[(x_0+\xi l) e^{\frac{-(x_0+\xi l)^2}{4a\tau}} + (x_0-\xi l) e^{\frac{-(x_0-\xi l)^2}{4a\tau}} \right] \frac{erf\left(\frac{y_0}{2\sqrt{a\tau}}\right)}{\tau^{3/2}} \right\} d\tau d\xi$$

$$(l < x_0).$$

Отсюда, вычисляя внутренний интеграл, находим

$$K_{\mathrm{I}}^* = \frac{4G(1+\nu)\alpha T_0\sqrt{l}}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[arctg\left(\frac{b}{1+\xi l_*}\right) + arctg\left(\frac{b}{1-\xi l_*}\right) \right] d\xi. \quad \textbf{(47)}$$

Здесь

$$b = \frac{y_0}{x_0}, \qquad l_* = \frac{l}{x_0} \qquad (0 < l^* < 1).$$

Вычисление интеграла в (47) дает

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[arctg\left(\frac{b}{1+\xi l_*}\right) + arctg\left(\frac{b}{1-\xi l_*}\right) \right] d\xi = arctg\left(\frac{b}{1+l_*}\right) +$$

$$+arctg\left(\frac{b}{1-l_*}\right) + arctg\left(\frac{B+2C}{A+2D+1}\right) - arctg\left(\frac{B}{A}\right). \quad \textbf{(48)}$$

Здесь

$$C = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{A^2+B^2} - A\right)}, \quad D = \frac{B}{2C}, \quad A = 1 + \frac{(b^2-1)}{(1+b^2)^2} l_*^2, \quad B = \frac{2bl_*^2}{(1+b^2)^2} \quad \textbf{(49)}$$

$$(A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad C < D).$$

С помощью (47) и (48) окончательно находим

$$K_{\mathrm{I}\max}^* = 2G(1+\nu)\alpha T_0\sqrt{\pi l}\, Y(b, l_*). \quad \textbf{(50)}$$

Здесь

$$Y(b, l_*) = \frac{1}{\pi}\left[arctg\left(\frac{b}{1+l_*}\right) + arctg\left(\frac{b}{1-l_*}\right) + arctg\left(\frac{B+2C}{A+2D+1}\right) - arctg\left(\frac{B}{A}\right) \right]$$

$$(0 < l^* < 1). \quad \textbf{(51)}$$

Функцию $Y(b, l_*)$ в механике разрушения иногда называют корректирующей функцией. Из (50) и (51), в частности, следует:

1°. Если $b \to +\infty$ (при этом предполагается, что x_0 является некоторой конечной величиной), то

$$K_{\mathrm{I}}^{*} = 2G\left(1+\nu\right)\alpha T_0\sqrt{\pi l} \qquad (0 < l < x). \tag{52}$$

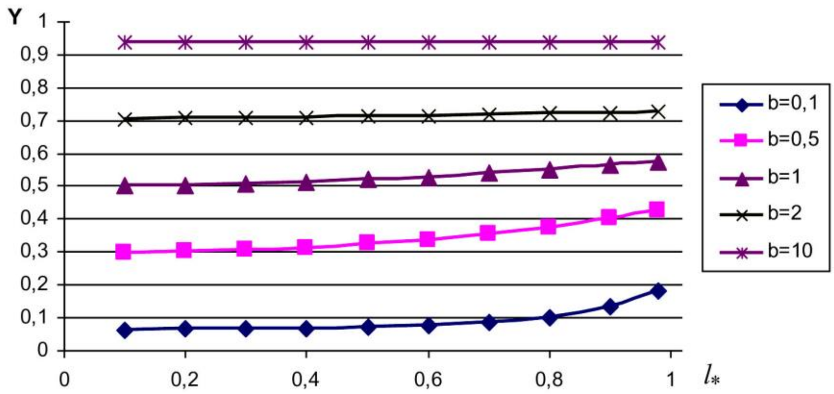
2°. Если $b = 1$ (при конечном x_0 (или y_0)), то

$$Y(1, l_*) = 1 - \frac{1}{\pi}\left\{arctg\left(\frac{2}{l_*^2}\right) - arctg\left(\frac{l_*^2}{2}\right) - arctg\left[\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{l_*^4}{4}} - \frac{1}{2}}\right]\right\}.$$

3°. Если $b \to +0$ (при конечном x_0), то $K_{\mathrm{I}}^{*} \equiv 0$.

4°. Если $b \to +0$ (при конечном y_0), то $K_{\mathrm{I}}^{*} \equiv 0$.

Поведение функции $Y(b, l_*)$ иллюстрируют результаты численного расчета, представленные графически на рисунке, каждая кривая задача есть график зависимости функции $Y(b, l_*)$ от l_* при некотором фиксированном значении безразмерного параметра *b*.



Из представленных на рисунке графиков видно, что:

1. При фиксированном значении параметра b функция $Y(b, l_*)$ монотонно растет с ростом l_* $(0 < l_* < 1)$.

2. При фиксированном значении l_* функция $Y(b, l_*)$ монотонно растет с увеличением параметра *b*.

Полученные результаты важны для определения прочности элементов конструкций, например, для создания неподвижных (прессовых) соединений деталей машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулиев В.Д., Курбанмагомедов А.К.* В-метод решения одной задачи термоупругости из К-класса // Вестн. Дагест. науч. центра. 2014. № 54. С. 18–25.
2. *Кулиев В.Д.* Сингулярные краевые задачи. М.: Физматлит, 2005. 720 с.
3. *Папкович П.Ф.* Теория упругости. М.: Гостехиздат, 1939. 456 с.
4. *Кулиев В.Д.* Метод решения задач термоупругости К-класса // Наука и современность – 2014: сб. материалов XXVIII Междунар. науч.-практ. конф. / под общ. ред. *С.С. Чернова.* Новосибирск: Изд-во ЦРНС, 2014. С. 46–59.

Поступила в редакцию 12.06.2014 г.
Принята к печати 24.12.2014 г.