

УДК 517.51

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ СТЕКЛОВА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

Отдел математики и информатики ДНЦ РАН,
Отдел функционального анализа ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А

В статье исследуются условия на вес, при которых семейство операторов Стеклова будет равномерно ограничено в весовых пространствах Лебега с переменным показателем.

This article considers the conditions on weight providing the family of Steklov operators with the uniform boundedness in the weighted Lebesgue spaces with variable exponent.

Ключевые слова: пространство Лебега с переменным показателем; операторы Стеклова; условие Дини – Липшица.

Keywords: Lebesgue spaces with variable exponent; Steklov operators; Dini – Lipschitz condition.

Введение

Пусть $p(x)$ – измеримая на $E = [0,1]$ функция такая, что $1 \leq \underline{p}(E) \leq p(x) \leq \overline{p}(E) < \infty$, $w(x)$ – суммируемая на E почти всюду положительная функция. Здесь и далее символами $\underline{p}(D)$, $\overline{p}(D)$ будем обозначать $\operatorname{ess\,inf}_{x \in D} p(x)$ и $\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} p(x)$ соответственно. Пространством $L_w^{p(x)}(E)$ назовем множество измеримых функций $f(x)$, заданных на E и удовлетворяющих условию

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \infty.$$

Пространство $L_w^{p(x)}(E)$ представляет собой линейное нормированное пространство, где одна из эквивалентных норм определяется следующим равенством ([1–4]):

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Отметим некоторые свойства, связанные с этими пространствами, которые понадобятся нам в дальнейшем.

$$1. \quad \|f\|_{p(\cdot),w} = \left\| f w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)}.$$

2. Для любых измеримых множеств $A \subset B$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(A) \leq \|f\|_{p(\cdot),w}(B),$$

так как

$$\int_A \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq \int_B \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)} \right|^{p(x)} w(x) dx = 1.$$

3. Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1.6.1 в [2], можно показать, что если $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q}(E) < \infty$, то для любой функции $f \in L_w^{q(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leq r_{p,q}^w \|f\|_{q(\cdot),w},$$

$$\text{где } r_{p,q}^w \leq \frac{1}{\underline{\alpha}} + \frac{\int_E w(x)dx}{\underline{\alpha}^*} \quad (\alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \alpha^*(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}).$$

4. Если $p(x) > 1, x \in M$ (не исключая и случай, когда $\underline{p}(M) = 1$), то справедливо неравенство типа Гельдера для пространств Лебега с переменным показателем [1, нер-во (8)]:

$$\int_M |f(x)| |g(x)| dx \leq c(p, M) \cdot \|f\|_{p(\cdot)}(M) \cdot \|g\|_{p'(\cdot)}(M),$$

где $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$, $c(p, M) \leq \frac{1}{\underline{p}(M)} + \frac{1}{\underline{p}'(M)}$. Через $c, c(\alpha), c(\alpha, \beta), \dots$ здесь и далее будут обозначаться положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, различные в разных местах.

Через $\mathcal{P}$ обозначим класс показателей $p(x)$, $p(x) \geq 1$, удовлетворяющих условию Дини-Липшица:

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x - y|} \leq C \quad (x, y \in E). \quad (2)$$

Определим для $f \in L^1(E)$ и $h > 0$ оператор Стеклова

$$s_h(f) = s_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt, \quad (3)$$

полагая при этом $f(x) \equiv 0$, когда $x > 1$. В дальнейшем мы будем рассматривать операторы Стеклова на функциях $f \in L_w^{p(x)}(E)$.

Чтобы можно было определить для $f(x) \in L_w^{p(x)}(E)$ оператор (3), функция $f(x)$ должна принадлежать $L^1(E)$, то есть требуется вложение $L_w^{p(x)}(E) \subset L^1(E)$. Очевидно, что это условие выполняется не для всех весов $w(x)$. В работе [5] исследованы условия на вес, при которых имеет место вышеупомянутое вложение. Рассмотрим эти условия.

Пусть $E_1 = \{x \in E : p(x) = 1\}$, $E_2 = E \setminus E_1$. Тогда

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx.$$

Лемма. Функция $f \in L_w^{p(x)}(E)$ будет суммируемой на E_1 в том и только в том случае, если вес ограничен от нуля почти всюду на E_1 :

$$w(x) \geq C_1(w) > 0 \quad \text{для почти всех } x \in E_1. \quad (4)$$

А для суммируемости $f \in L_w^{p(x)}$ на E_2 достаточно выполнения следующего условия:

$$\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty. \quad (5)$$

Через $\mathcal{H}(E, p)$ обозначим класс весов, удовлетворяющих условиям (4), (5).

Заметим [5], что при выполнении условий (4) и (5) из 1° и 2° имеем

$$\int_E |f(x)| dx \leq C(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}. \quad (6)$$

В настоящей работе исследуются условия на вес, при которых семейство $\{s_h(f)(x)\}_{h>0}$ будет равномерно ограничено в пространствах $L_w^{p(x)}$, $p(x) \in \mathcal{P}$. Следует подчеркнуть, какое значение имеют операторы Стеклова для теории приближения в пространствах с переменным показателем. Дело в том, что из того, что $f(x) \in L^{p(x)}$ вообще говоря не следует, что и сдвиг $f^h(x) = f(x+h)$ принадлежит $L^{p(x)}$. Тем самым, величина

$$\varphi(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|f - f(*+h)\|_{p(\cdot)}$$

в случае переменного показателя не может рассматриваться в качестве модуля непрерывности функции $f \in L^{p(x)}$ [6]. В то же время семейство операторов Стеклова, как было показано в работе [7], при $w(x) \equiv 1$ равномерно ограничено в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$ измеримых 2π -периодических функций, для которых $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$. Следовательно, для любого $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ оператор $s_h(f)(x)$ также принадлежит $L_{2\pi}^{p(x)}$, что позволило вместо обычных сдвигов $f^h(x)$ использовать операторы Стеклова, представляющие собой усредненные сдвиги, и ввести модуль непрерывности

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)},$$

что в дальнейшем позволит рассматривать задачи теории приближения в весовых пространствах Лебега с переменным показателем $p(x) \geq 1$.

Основной результат

Введем некоторые обозначения. Пусть $n = \left\lfloor \frac{1}{h} \right\rfloor$, $\lambda_{nk} = [kh, (k+1)h]$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\Delta_k^h = \lambda_{nk} \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \lambda_{nk+1}$ и $\mathcal{B}^h = \{\Delta_k^h\}_{k=0}^n$ – множество отрезков длины $2h$, $p_k = \underline{p}(\Delta_k^h)$. Через $\mathcal{B}_\varepsilon = \bigcup_{h < \varepsilon} \mathcal{B}^h$ обозначим совокупность всех отрезков $\Delta_k^h \in \mathcal{B}^h$, где $h < \varepsilon$, а через $\mathcal{B}_\varepsilon^{1,p} = \{\Delta_k^h : \underline{p}(\Delta_k^h) = 1\}$ – подмножество $\mathcal{B}_\varepsilon$, состоящее из отрезков Δ_k^h таких, что $p_k = 1$. Будем далее полагать, что $p(x) \equiv p(1)$ при $x > 1$.

Теорема. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$, $w \in \mathcal{H}(E, p)$. Тогда семейство операторов Стеклова $\{s_h(f)(x)\}_{h>0}$ будет равномерно ограничено в пространстве $L_w^{p(x)}(E)$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{B \in \mathcal{B}_\varepsilon^{1,p}} \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx < C(w), \quad (7)$$

$$\sup_{B \in \mathcal{B}_\varepsilon \setminus \mathcal{B}_\varepsilon^{1,p}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{-\frac{1}{p(B)-1}} dx \right)^{p(B)-1} < C(p, w). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $f \in L_w^{p(x)}(E)$ и

$$\|f\|_{p(\cdot), w}(E) \leq 1. \quad (9)$$

Покажем равномерную ограниченность операторов Стеклова. Имеем

$$J = \int_E |s_h(f)(x)|^{p(x)} w(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_{\lambda_{nk}} |s_h(f)(x)|^{p(x)} w(x) dx =$$

$$\sum_{k=0}^n \int_{\lambda_{nk}} \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{p(x)} w(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_{\lambda_{nk}} \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{p(x)-p_k+p_k} w(x) dx. \quad (10)$$

Используя неравенства (6) и (9), получим соотношение

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{p(x)-p_k} \leq \left(\frac{1}{h} \right)^{p(x)-p_k} \left(\int_E |f(x+t)| dt \right)^{p(x)-p_k} \leq \left(\frac{1}{h} \right)^{p(x)-p_k} (C(p, w))^{p(x)-p_k}.$$

Ввиду того, что $p(x)$ удовлетворяют условию Дини – Липшица (2), имеют место следующие оценки

$$\left(\frac{1}{h} \right)^{p(x)-p_k} \leq \left(\frac{1}{h} \right)^{\ln \frac{1}{2h}} \leq C_1 \quad \text{и} \quad (C(p, w))^{p(x)-p_k} \leq C_2(p, w).$$

Стало быть,

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{p(x)-p_k} \leq C(p, w).$$

Поставляя полученную оценку в (10), выводим

$$\begin{aligned} J &\leq C(p, w) \sum_{k=0}^n \int_{\lambda_{nk}} \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{p_k} w(x) dx = \\ &C(p, w) \left(\sum_{k \in K_1} + \sum_{k \in K_2} \right) \int_{\lambda_{nk}} \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{p_k} w(x) dx = C(p, w)(S_1 + S_2), \end{aligned} \quad (11)$$

где $K_1 = \{k : p_k = 1\}$, а $K_2 = \{k : p_k > 1\}$.

Оценим первую сумму. Из (6), (7) и (9) имеем следующую оценку

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k \in K_1} \int_{\lambda_{nk}} w(x) \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right| dx \leq \sum_{k \in K_1} \frac{1}{h} \int_{\lambda_{nk}} w(x) \int_x^{x+h} |f(t)| dt dx \leq \\ &\sum_{k \in K_1} \frac{1}{h} \int_{\lambda_{nk}} w(x) dx \int_{\lambda_{nk} \cup \lambda_{nk+1}} |f(t)| dt \leq \\ &2C(w) \int_E |f(t)| dt \leq C(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w} \leq C(p, w) \end{aligned} \quad (12)$$

Покажем теперь ограниченность второй суммы. Воспользовавшись неравенством Гельдера (4°), получаем

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k \in K_2} \int_{\lambda_{nk}} w(x) \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \right|^{p_k} dx \leq \\ &\sum_{k \in K_2} \int_{\lambda_{nk}} w(x) \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} w^{\frac{1}{p_k}}(t) |f(t)| w^{-\frac{1}{p_k}}(t) dt \right)^{p_k} dx \leq \end{aligned}$$

$$\sum_{k \in K_2} \int_{\lambda_{nk}} w(x) \left(\frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} w(t) |f(t)|^{p_k} dt \right)^{\frac{1}{p_k}} \left(\int_x^{x+h} w^{\frac{p'_k}{p_k}}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'_k}} \right)^{p_k} dx =$$

$$\sum_{k \in K_2} \int_{\lambda_{nk}} w(x) \frac{1}{h^{\frac{p_k}{p'_k}}} \int_x^{x+h} w(t) |f(t)|^{p_k} dt \left(\int_x^{x+h} w^{\frac{p'_k}{p_k}}(t) dt \right)^{\frac{p_k}{p'_k}} dx. \quad (13)$$

Замечая, что $\frac{p_k}{p'_k} = p_k - 1$, выражение (13) можно переписать в следующем виде

$$\sum_{k \in K_2} \int_{\lambda_{nk}} w(x) \frac{1}{h^{\frac{p_k}{p'_k}}} \int_x^{x+h} w(t) |f(t)|^{p_k} dt \left(\int_x^{x+h} w^{\frac{1}{p_k-1}}(t) dt \right)^{p_k-1} dx \leq$$

$$\sum_{k \in K_2} \frac{1}{h} \int_{\lambda_{nk} \cup \lambda_{nk+1}} w(x) dx \left(\frac{1}{h} \int_{\lambda_{nk} \cup \lambda_{nk+1}} w^{\frac{1}{p_k-1}}(t) dt \right)^{p_k-1} \int_{\lambda_{nk} \cup \lambda_{nk+1}} w(t) |f(t)|^{p_k} dt. \quad (14)$$

С учетом (8) из соотношения (14) получается следующая оценка

$$S_2 \leq C(p, w) \sum_{k \in K_2} \int_{\lambda_{nk} \cup \lambda_{nk+1}} w(t) |f(t)|^{p_k} dt.$$

Пусть $q_1(t) = p_k$, $x \in \lambda_{nk}$ и $q_2(t) = p_k$, $x \in \lambda_{nk+1}$. Тогда в силу свойства 3° и условия (9)

$$S_2 \leq C(p, w) \left(\sum_{k \in K_2} \int_{\lambda_{nk}} w(t) |f(t)|^{q_1(t)} dt + \sum_{k \in K_2} \int_{\lambda_{nk+1}} w(t) |f(t)|^{q_2(t)} dt \right) \leq$$

$$C(p, w) \left(\int_E w(t) |f(t)|^{q_1(t)} dt + \int_E w(t) |f(t)|^{q_2(t)} dt \right) =$$

$$C(p, w) \left(\int_E w(t) \|f\|_{q_1(\cdot), w}^{q_1(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{q_1(\cdot), w}} \right|^{q_1(t)} dt + \int_E w(t) \|f\|_{q_2(\cdot), w}^{q_2(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{q_2(\cdot), w}} \right|^{q_2(t)} dt \right) \leq$$

$$C(p, w) \left(\int_E w(t) (r_{q_1, p}^w)^{q_1(t)} \|f\|_{p(\cdot), w}^{q_1(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{q_1(\cdot), w}} \right|^{q_1(t)} dt + \int_E w(t) (r_{q_2, p}^w)^{q_2(t)} \|f\|_{p(\cdot), w}^{q_2(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{q_2(\cdot), w}} \right|^{q_2(t)} dt \right) \leq$$

$$C(p, w) \left((r_{q_1, p}^w)^{\bar{p}(E)} \int_E w(t) \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{q_1(\cdot), w}} \right|^{q_1(t)} dt + (r_{q_2, p}^w)^{\bar{p}(E)} \int_E w(t) \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{q_2(\cdot), w}} \right|^{q_2(t)} dt \right) =$$

$$C(p, w) \left((r_{q_1, p}^w)^{\bar{p}(E)} + (r_{q_2, p}^w)^{\bar{p}(E)} \right) \quad (15)$$

Из (11), (12) и (15) следует равномерная ограниченность семейства операторов Стеклова на единичном шаре.

Автор благодарит д.ф.-м.н. И.И. Шарапудинова за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарапудинов И.И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.
2. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и PCO-A, 2012. С. 270.
3. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents / *L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ruzicka*. Springer, 2011. Т. 2017 из Lecture Notes in Mathematics. С. 509.
4. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis. Springer, 2013. С. 312.
5. *Магомед-Касумов М.Г.* Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказский математический журнал. 2014. Т. 16, вып. 3. С. 38–46.
6. *Шарапудинов И.И.* Приближение функций в метрике пространства $L^{p(t)}([a,b])$ и квадратурные формулы // Constructive function theory'81. Proceeding of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna, June 1–5. 1981. С. 189–302.
7. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах $L^p(x)$ // Analysis Mathematica. 2007. Т. 33, № 2. С. 135–153.

Поступила в редакцию 16.07.2014 г.
Принята к печати 28.09.2014 г.