

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.521

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ КУСОЧНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

М. Г. Магомед-Касумов

Отдел математики и информатики ДНЦ РАН,
Отдел функционального анализа ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А

В статье исследуется скорость сходимости классических средних Валле-Пуссена по тригонометрической системе для 2π -периодических функций $f(x)$, имеющих конечное число точек разрыва $\{\theta_i\}_{i=1}^q$ и таких, что на каждом сегменте $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ они могут быть превращены в функции из пространства Соболева $W_1^3([\theta_i, \theta_{i+1}])$ путем изменения их значений на концах сегмента. Полученная оценка показывает, что такого рода функции средние Валле-Пуссена $V_n(f, x)$ приближают со скоростью $1/n^2$, что на порядок быстрее сумм Фурье.

This article is about an approximation speed of the Vallée Poussin means of trigonometric series for 2π -periodic functions that have a finite number of break points $\{\theta_i\}_{i=1}^q$ and on each segment $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ they can be turned into the functions from Sobolev space $W_1^3([\theta_i, \theta_{i+1}])$ by changing their values on the segment ends. The obtained estimation shows that Vallée Poussin means approximate such functions with $1/n^2$ speed, which is faster than that for the Fourier sums.

Ключевые слова: средние Валле-Пуссена; тригонометрическая система; скорость сходимости; кусочно гладкие функции; аппроксимативные свойства.

Keywords: Vallée Poussin means; trigonometric system; approximation speed; piecewise smooth functions; approximative properties.

1. Введение. Пусть $f(x)$ – некоторая суммируемая 2π -периодическая функция. Рядом Фурье для такой функции называют ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

$$\text{где } a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt.$$

Частичные суммы ряда Фурье порядка n определяются следующим образом:

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (2)$$

Средние Валле-Пуссена вводятся как средние арифметические частичных сумм Фурье:

$$V_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f, x) = \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \dots + S_{2n-1}(x)}{n}. \quad (3)$$

Целью данной работы является исследование скорости сходимости средних Валле-Пуссена для кусочно гладких функций $f(x)$ из пространства $W_1^{3,A}$ (см. определение в п. 3), т.е. получение оценки скорости стремления к нулю величины $|f(x) - V_n(f, x)|$ при $n \rightarrow \infty$.

2. Вспомогательное утверждение. Напомним, что преобразование Абеля называется формула

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k + \alpha_n B_n, \quad B_k = \sum_{j=1}^k \beta_j. \quad (4)$$

Если $\alpha_n B_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то преобразование Абеля обобщается на ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k. \quad (5)$$

При доказательстве утверждения данного пункта нам также понадобятся следующие тригонометрические соотношения:

$$\sum_{k=m}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{2m-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad (6)$$

$$\sum_{k=m}^n \cos(2k+1)x = \frac{\sin(2n+2)x - \sin 2mx}{2 \sin x}. \quad (7)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для функций

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} \quad (8)$$

имеет место оценка ($\varepsilon > 0, n \geq 1$)

$$|f(x) - V_n(f, x)| \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}, \quad x \in M = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Доказательство. Отметим, что ряды (8) сходятся на рассматриваемом отрезке M (см. 1, теорема (2.6), с. 16). Докажем лемму для $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$. Для второго ряда доказательство проводится аналогично.

Представим разность $f(x) - V_n(f, x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x) - V_n(f, x) &= f(x) - \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \dots + S_{2n-1}(x)}{n} = \\ &= \frac{f(x) - S_n(x) + f(x) - S_{n+1}(x) + \dots + f(x) - S_{2n-1}(x)}{n} = \\ &= \frac{R_n(x) + R_{n+1}(x) + \dots + R_{2n-1}(x)}{n}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$.

Запишем теперь последнюю часть формулы (9) в табличном виде:

$$\begin{aligned} f(x) - V_n(f, x) &= \frac{1}{n} \left(\begin{array}{cccc} \frac{\sin(n+1)x}{n+1} & + & \frac{\sin(n+2)x}{n+2} & + & \frac{\sin(n+3)x}{n+3} & + & \dots \\ \frac{\sin(n+2)x}{n+2} & + & \frac{\sin(n+3)x}{n+3} & + & \frac{\sin(n+4)x}{n+4} & + & \dots \\ \dots & & & & & & \\ \frac{\sin 2nx}{2n} & + & \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} & + & \frac{\sin(2n+2)x}{2n+2} & + & \dots \end{array} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Через $\nu_p, p = n, n+1, \dots$ будем обозначать вертикальные конечные суммы из (10):

$$\nu_p = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(p+k)x}{p+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p+k} \sin(p+k)x, \quad p = n, n+1, \dots \quad (11)$$

Применим к суммам (11) преобразование Абеля:

$$\alpha_k = \frac{1}{p+k}, B_k = \sum_{j=1}^k \sin(p+j)x. \quad (12)$$

Пользуясь формулой (6), для B_k получим следующее выражение:

$$B_k = \sum_{j=p+1}^{p+k} \sin jx = \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+2k+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \quad (13)$$

Следовательно, для сумм $\nu_p (p = n, n+1, \dots)$ приходим к формуле

$$\nu_p = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(p+k)(p+k+1)} \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+2k+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{p+n} \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \quad (14)$$

Таким образом, после применения к каждому столбцу ν_p преобразования Абеля формула (10) примет вид

$$\begin{aligned} f(x) - V_n(f, x) = & \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot (\\ & \frac{\cos \frac{2n+1}{2}x - \cos \frac{2n+3}{2}x}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+3}{2}x}{(p+1)(p+2)} + \dots \\ & \dots \\ & \frac{\cos \frac{2n+1}{2}x - \cos \frac{2n+2k+1}{2}x}{(n+k)(n+k+1)} + \dots + \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+2k+1}{2}x}{(p+k)(p+k+1)} + \dots \\ & \dots \\ & \frac{\cos \frac{2n+1}{2}x - \cos \frac{4n-1}{2}x}{2n(2n+1)} + \dots + \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+2n+1}{2}x}{(p+n)(p+n+1)} + \dots \\ & \frac{\cos \frac{2n+1}{2}x - \cos \frac{4n+1}{2}x}{2n} + \dots + \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+2n+1}{2}x}{p+n} + \dots). \end{aligned} \quad (15)$$

В приведенной выше формуле строки, представляющие собой ряды, обозначим символом h_k , т.е.

$$h_k = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+2k+1}{2}x}{(p+k)(p+k+1)}, k = \overline{1, n-1}, \quad (16)$$

$$h_n = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{\cos \frac{2p+1}{2}x - \cos \frac{2p+2n+1}{2}x}{p+n}. \quad (17)$$

Используя эти обозначения, выражение (15) можно переписать в следующем виде:

$$f(x) - V_n(f, x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n h_k. \quad (18)$$

Применим к рядам (16), (17) преобразование Абеля. Получим для $h_k, k = \overline{1, n-1}$:

$$\alpha_p = \frac{1}{(p+k)(p+k+1)},$$

$$B_p = \sum_{j=n}^p \left(\cos \frac{2j+1}{2} x - \cos \frac{2j+2k+1}{2} x \right) = \sum_{j=n}^p \cos(2j+1) \frac{x}{2} - \sum_{j=n}^p \cos(2(j+k)+1) \frac{x}{2}.$$

Применяя (7) к каждой сумме в формуле для B_p , получим

$$B_p = \frac{\sin(2p+2) \frac{x}{2} - \sin 2n \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin(2(p+k)+2) \frac{x}{2} - \sin(2(n+k)) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} =$$

$$\frac{\sin(p+1)x - \sin nx + \sin(n+k)x - \sin(p+k+1)x}{2 \sin \frac{x}{2}} =$$

$$\frac{-2 \sin \frac{k}{2} x \cos \frac{2p+2+k}{2} x + 2 \sin \frac{k}{2} x \cos \frac{2n+k}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin k \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{2n+k}{2} x - \cos \frac{2p+2+k}{2} x \right). \quad (19)$$

Следовательно, воспользовавшись формулой (5), для h_k имеем

$$h_k = 2 \frac{\sin k \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{p=n}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n+k}{2} x - \cos \frac{2p+2+k}{2} x}{(p+k)(p+k+1)(p+k+2)}. \quad (20)$$

Вполне аналогично для h_n можно получить следующее выражение:

$$h_n = \frac{\sin n \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{p=n}^{\infty} \frac{\cos \frac{3n}{2} x - \cos \frac{2p+2+n}{2} x}{(p+n)(p+n+1)}.$$

Оценим теперь суммы $h_k, k = \overline{1, n-1}$:

$$|h_k| \leq \frac{2}{|\sin \frac{\varepsilon}{2}|} \sum_{p=n}^{\infty} \left(\frac{1}{(p+k)(p+k+1)} - \frac{1}{(p+k+1)(p+k+2)} \right) = \frac{2}{|\sin \frac{\varepsilon}{2}|} \cdot \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}. \quad (21)$$

Рассуждая аналогичным образом, получим и оценку для h_n :

$$|h_n| \leq \frac{2}{|\sin \frac{\varepsilon}{2}|} \cdot \frac{1}{2n}. \quad (22)$$

Тогда из (18), (21) и (22) выводится окончательная оценка:

$$|f(x) - V_n(f, x)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) + \frac{1}{2n} \right] = \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}. \quad (23)$$

Лемма доказана.

3. Основной результат. Для формулировки основного результата нам потребуются некоторые обозначения. Пространством Соболева $W_p^r([a,b])$ называется множество $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$, а $f^{(r)}(x) \in L^p([a,b])$. Через $\|f\|_1$ и $\|f\|_\infty$ будем обозначать $\int_0^{2\pi} |f(t)| dt$ и $\operatorname{ess\,sup}_{[0,2\pi]} |f(x)|$ соответственно.

Далее, пусть дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$

$$A = \{0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_q = 2\pi\}.$$

Тогда через $W_1^{3,A}$ обозначим класс 2π -периодических функций, которые на каждом отрезке $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ можно превратить в функцию из $W_1^3([\theta_i, \theta_{i+1}])$ путем переопределения её на концах. Другими словами, если $f(x) \in W_1^{3,A}$, то, во-первых, $\|f'''(x)\|_1 < \infty$ и, во-вторых, на каждом отрезке $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ функции $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ можно сделать абсолютно непрерывными, изменив $f(x)$ разве что лишь в двух точках - концах отрезка.

Имеет место теорема.

Теорема. Для функций $f(x)$ из класса $W_1^{3,A}$ справедлива следующая оценка остатка при приближении суммами Валле-Пуссена ($n \geq 1$):

$$|\mathfrak{R}_n(f, x)| = |f(x) - V_n(f, x)| \leq \frac{6q+1}{\pi \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{M_f}{n(n+1)}, \quad x \in D = \bigcup_{i=1}^q [\theta_{i-1} + \varepsilon, \theta_i - \varepsilon]$$

где $M_f = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty, \|f'''\|_1\}$, ε - любое положительное число.

Доказательство. Для сумм Валле-Пуссена $V_n(f, x)$ остаток $\mathfrak{R}_n(f, x)$ выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{R}_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (24)$$

где $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt$. Введем обозначения:

$$a_{k,i} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f(t) \cos kt dt, \quad i = \overline{1, q} \quad (25)$$

$$b_{k,i} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f(t) \sin kt dt, \quad i = \overline{1, q}, \quad (26)$$

где θ_i , $i = \overline{0, q}$ - точки разбиения A . Тогда коэффициенты a_k и b_k можно записать в следующем виде:

$$a_k = \sum_{i=1}^q a_{k,i}, \quad b_k = \sum_{i=1}^q b_{k,i}.$$

Используя такое представление коэффициентов, перепишем формулу (24):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_n(f, x) &= \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{i=1}^q a_{k,i} \cos kx + b_{k,i} \sin kx = \\ &= \sum_{i=1}^q \left[\frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} a_{k,i} \cos kx + b_{k,i} \sin kx \right] = \sum_{i=1}^q \mathfrak{R}_{n,i}(f, x). \end{aligned} \quad (27)$$

Перестановка знаков суммирования, произведенная в формуле выше, является допустимой, поскольку, как будет показано дальше, ряды $\Re_{n,i}(f, x)$ являются сходящимися.

Рассмотрим отдельно величину $\Re_{n,i}(f, x)$ при некотором фиксированном индексе i . Очевидно, что изменение функции $f(x)$ в двух точках θ_{i-1} и θ_i никак не повлияет на значения коэффициентов $a_{k,i}$ и $b_{k,i}$, а следовательно, останется неизменной и величина $\Re_{n,i}(f, x)$. В то же время функция $f(x) \in W_1^{3,A}$, поэтому по определению функцию $f(x)$ можно, поменяв по непрерывности ее значения в θ_{i-1} и θ_i , сделать принадлежащей классу $W_1^3([\theta_{i-1}, \theta_i])$. Последнее означает, что мы можем трижды применить интегрирование по частям в формулах (25), (26):

$$\begin{aligned} a_{k,i} = & \frac{1}{\pi} \left(\frac{f(\theta_i - 0) \sin k\theta_i - f(\theta_{i-1} + 0) \sin k\theta_{i-1}}{k} + \right. \\ & \left. \frac{f'(\theta_i - 0) \cos k\theta_i - f'(\theta_{i-1} + 0) \cos k\theta_{i-1}}{k^2} - \right. \\ & \left. \frac{f''(\theta_i - 0) \sin k\theta_i - f''(\theta_{i-1} + 0) \sin k\theta_{i-1}}{k^3} + \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f'''(t) \frac{\sin kt}{k^3} dt \right); \\ b_{k,i} = & \frac{1}{\pi} \left(\frac{f(\theta_{i-1} + 0) \cos k\theta_{i-1} - f(\theta_i - 0) \cos k\theta_i}{k} + \right. \\ & \left. \frac{f'(\theta_i - 0) \sin k\theta_i - f'(\theta_{i-1} + 0) \sin k\theta_{i-1}}{k^2} + \right. \\ & \left. \frac{f''(\theta_i - 0) \cos k\theta_i - f''(\theta_{i-1} + 0) \cos k\theta_{i-1}}{k^3} - \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f'''(t) \frac{\cos kt}{k^3} dt \right); \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу для $\Re_{n,i}(f, x)$, получим:

$$\begin{aligned} \Re_{n,i}(f, x) = & \frac{1}{n\pi} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left[f(\theta_i - 0) \frac{\sin k(\theta_i - x)}{k} + f(\theta_{i-1} + 0) \frac{\sin k(x - \theta_{i-1})}{k} + \right. \\ & f'(\theta_i - 0) \frac{\cos k(\theta_i - x)}{k^2} - f'(\theta_{i-1} + 0) \frac{\cos k(x - \theta_{i-1})}{k^2} - \\ & \left. f''(\theta_i - 0) \frac{\sin k(\theta_i - x)}{k^3} - f''(\theta_{i-1} + 0) \frac{\sin k(x - \theta_{i-1})}{k^3} - \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f'''(t) \frac{\sin k(x - t)}{k^3} dt \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Чтобы оценить $\Re_{n,i}(f, x)$, отметим следующие факты:

1. Согласно лемме 1 имеем:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\sin k(\theta_i - x)}{k} \right| \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}, \quad x \in D, \quad (29)$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\sin k(x - \theta_{i-1})}{k} \right| \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}, \quad x \in D. \quad (30)$$

2. Применяя преобразование Абеля можно показать, что

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = -\frac{D_j(x)}{(j+1)^2} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right] D_k(x),$$

где $D_k(x) = \frac{\sin(k + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ – ядро Дирихле. Поскольку для $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ ядро Дирихле равномерно

ограничено числом $\frac{1}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}}$, то из написанного выше равенства следует, что

$$\left| \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{(j+1)^2}, \quad x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Это, в свою очередь, приводит к неравенствам

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}, \quad x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]. \quad (31)$$

3. С помощью оценки для остатков обобщенного гармонического ряда [2, с. 284] сразу выводится следующее соотношение:

$$\left| \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3} \right| \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2j^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда получаем неравенство ($n \geq 1$):

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3} \right| \leq \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Из (28)–(32) вытекает следующая оценка для $\mathfrak{R}_{n,i}(f, x)$:

$$|\mathfrak{R}_{n,i}(f, x)| \leq \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \left(6M_f + \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} |f'''(t)| dt \right).$$

Отсюда и из (27) приходим к требуемой оценке ($n \geq 1$):

$$|\mathfrak{R}_n(f, x)| \leq \frac{6q+1}{\pi \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{M_f}{n(n+1)}.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит д.ф.-м.н. И.И. Шарпудинова за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / под ред. Н.К. Бари. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2001. 810 с.

Поступила в редакцию 23.07.2014 г.
Принята к печати 28.09.2014 г.