ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.538

ПРОСТРАНСТВО СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

И. И. Шарапудинов

Отдел математики и информатики ДНЦ РАН

Рассматривается пространство $L^{p(x)}$, состоящее из действительных измеримых функций $f(x)$, определенных на $[-1,1]$, для которых существует конечный интеграл $\int_{-1}^{1}|f(x)|^{p(x)}dx$. Если $1 \le p(x) \le \overline{p} < \infty$, то пространство $L^{p(x)}$ можно превратить в банахово пространство с нормой $||f||_{p(\cdot)} = \inf\{\alpha > 0: \int_{-1}^{1}|f(x)/\alpha|^{p(x)}dx \le 1\}$. В пространстве $L^{p(x)}$ выделяются подпространства Соболева $W^r_{p(\cdot)}$ с переменным показателем $p(x)$. Рассмотрены некоторые вопросы теории приближений функций из пространств Соболева $W^r_{p(\cdot)}$.

Sobolev space $W^r_{p(\cdot)}$ is a subspace of $L^{p(x)}$ space that consist of real measurable functions $f(x)$, defined on $[-1,1]$ and satisfied the condition $\int_{-1}^{1}|f(x)|^{p(x)}dx < \infty$. For $1 \le p(x) \le \overline{p} < \infty$ we can turn $L^{p(x)}$ to Banach space with the norm $||f||_{p(\cdot)} = \inf\{\alpha > 0: \int_{-1}^{1}|f(x)/\alpha|^{p(x)}dx \le 1\}$. In this article it is considered some problems of approximation theory of functions from Sobolev space.

Ключевые слова: пространства Лебега и Соболева с переменным показателем; приближение функций алгебро-тригонометрическими полиномами.

Keywords: variable Lebesgue and Sobolev space; approximation by algebraic and trigonometric polynomials.

Введение

Пусть $f(t)$ достаточно гладкая функция, заданная на $[-1,1]$. Рассмотрим задачу о приближении $f(t)$ комбинациями вида $p_n(t) + \tau_m(t)$, где $p_n(t)$ − алгебраический полином степени n,

$$\tau_m(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos k\pi t + b_k \sin k\pi t$$

− тригонометрический полином порядка m. Подобные задачи часто встречаются в различных областях приложений, в которых для заданного временного ряда наблюдений $f(t)$ требуется найти так называемый тренд $p_n(t)$ и периодическую составляющую $\tau_m(t)$.

Обозначим через X некоторое нормированное с нормой $||f||_X$ пространство функций $f = f(t)$, заданных на $[-1,1]$. Если X содержит все алгебраические и тригонометрические полиномы, то мы можем определить величину

$$E_{n,m}(f)_X = \inf_{p_n, \tau_m} ||f - p_n - \tau_m||_X,$$

представляющую собой наилучшее приближение функции $f \in X$ алгебро-тригонометрическими полиномами $p_n(x) + \tau_m(x)$ порядка $n + m$. Если Y − некоторый подкласс из X, то положим

$$E_{n,m}(Y)_X = \sup_{f \in Y} E_{n,m}(f)_X.$$

Ставится задача об исследовании поведения величины $E_{n,m}(Y)_X$ для различных нормированных пространств X и классов $Y \subset X$. Основное внимание ниже будет уделено случаю, когда $X = C[-1,1]$ – пространство функций $f = f(x)$, заданных и непрерывных на $[-1,1]$, для которых норма определяется обычным образом:

$$||f|| = ||f||_\infty = \max_{-1\le x\le 1}|f(x)|.$$

В пространстве $C[-1,1]$ будем выделять классы Соболева $W^r_{p(\cdot)}(M)$ с переменным показателем $p(x)$, теория которых в последние годы развивается ускоренными темпами ввиду ряда важных приложений этих пространств в различных областях. Мы вкратце напомним определение пространств Соболева с переменным показателем, для чего напомним сначала определение пространства Лебега $L^{p(x)}(E)$ с переменным показателем $p(x)$. Пусть E – измеримое множество, $0 \le p(x)$ – измеримая функция, заданная на E. Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим множество действительных измеримых функций $f(x)$, для которых конечен интеграл $\int_E |f(x)|^{p(x)}dx$. Если $p(x)$ существенно ограничена на E и $p(x) \ge 1$ $(x \in E)$, то $L^{p(x)}(E)$ представляет собой [1] нормированное пространство с нормой

$$||f||_{p(\cdot)}(E) = \inf\{\alpha > 0: \int_E |f(x)/\alpha|^{p(x)}dx \le 1\}. \tag{1.1}$$

Пространство Соболева $W^r_{p(\cdot)}(M) = W^r_{p(\cdot)}(M,-1,1)$ с переменным показателем $p(x)$ состоит из $r-1$-раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$, а $f^{(r)}(x) \in L^{p(x)}(-1,1)$ и

$$||f^{(r)}||_{p(\cdot)}([-1,1]) \le M. \tag{1.2}$$

Через $\widetilde{W}^r_{p(\cdot)}(M) = \widetilde{W}^r_{p(\cdot)}(M,-1,1)$ обозначим подкласс класса $W^r_{p(\cdot)}(M,-1,1)$, состоящий из функций $f(x) \in W^r_{p(\cdot)}(M,-1,1)$, допускающих 2-периодическое продолжение с сохранением гладкости, т. е. $f^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(1)$ $(0 \le \nu \le r-1)$. Положим $W^r_{p(\cdot)} = \bigcup_{M>0} W^r_{p(\cdot)}(M)$. При $p = \infty$ будем считать, что $W^r_\infty(M)$ состоит из r-раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, заданных на $[-1,1]$ и, соответственно, $\widetilde{W}^r_\infty(M) \subset W^r_\infty(M)$. Пространства Соболева с переменным показателем впервые были введены в работе автора [2] в связи с некоторыми задачами теории приближений и квадратурных формул.

Основная идея, которая позволяет успешно решить поставленную задачу для классов $W^r_{p(\cdot)}(M)$ заключается в следующем. Для заданной функции $f \in W^r_{p(\cdot)}(M)$ подбирается алгебраический полином $p_n(x) = p_n(f,x)$, удовлетворяющий условиям

$$p_n^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1) \quad (\nu = 0,1,\dots,r-1),$$

который доставляет для функции $f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ одновременное равномерное на $[-1,1]$ приближение порядка $n^{\nu-r}$. Затем разность $g_n(x) = f(x) - p_n(x)$ продолжается 2-периодически на всю числовую ось с сохранением гладкости. После этого функцию $g_n(x)$ приближаем тригонометрическими полиномами. Этим методом в случае $p = \infty$ получены неулучшаемые порядковые оценки для величины $E_{n,m}(W^r_{p(\cdot)}(M))_{C[-1,1]}$ при $n + m \to \infty$, а именно

$$E_{n,m}(W^r_\infty(M))_{C[-1,1]} \asymp (n+m)^{-r}.$$

Через $\hat{P}$ мы обозначим класс переменных показателей $p = p(x)$, заданных на $[-1,1]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$p = p(x) > 1$ для всех $x \in [-1,1]$ и удовлетворяет условию Дини – Липшица

$$|p(x) - p(y)|\left|\ln\frac{1}{|x-y|}\right| \le C, \quad x,y \in [-1,1]; \tag{1.3}$$

для каждого показателя $p = p(x) \in \hat{P}$ найдутся такие числа $l = l(p)$, $r = r(p)$, $\delta_1 = \delta_1(p)$ и $\delta_2 = \delta_2(p)$, что $l, r > 1$, $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$,

$$p(x) = \begin{cases} l, x \in [-1, -1 + \delta_1], \\ r, x \in [1 - \delta_2, 1]. \end{cases} \tag{1.4}$$

Особо отметим, что числа $\delta_1 = \delta_1(p)$ и $\delta_2 = \delta_2(p)$, фигурирующие в **(1.4)**, могут оказаться сколь угодно малыми положительными числами.

Через $\tilde{P}$ обозначим класс 2-периодических переменных показателей $p(x) \geq 1$, удовлетворяющих на $[-1,1]$ условию **(1.3)**.

В настоящей статье показано, что если $p(x) \in \hat{P} \cap \tilde{P}$ и $4/3 < p(\pm 1) < 4$, то для $f(x) \in W^r_{p(\cdot)}(M)$ и каждой пары (n, m) найдется алгебро-тригонометрический полином $p_n(x) + \tau_m(x)$, для которого равномерно относительно $x \in [-1,1]$ справедлива оценка

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x) - \tau_m^{(\nu)}(x)| = c(r, M, p)(n + m)^{-r+\nu+\frac{1}{p(x)}}, \quad 0 \leq \nu \leq r - 1. \tag{1.5}$$

При решении этой задачи основную роль играют так называемые смешанные ряды по полиномам Лежандра, введенные и исследованные в ряде работ автора. Значительное место в настоящей главе отведено исследованию свойств этих рядов. Если $f(x) \in W^r_{p(\cdot)}(M)$, но в класс $\widetilde{W}^r_{p(\cdot)}(M)$ не входит, то суммы Фурье $S^T_m(f, x)$ по тригонометрической системе не смогут аппроксимировать $f(x)$ с заданной точностью в каждой точке $x \in [-1,1]$ по той простой причине, что $S^T_m(f, x)$ является 2-периодической функцией, а $f(x) \in W^r_{p(\cdot)}(M) \backslash \widetilde{W}^r_{p(\cdot)}(M)$ таковой не является. В связи с этим возникает задача о нахождении метода приближения непериодических гладких функций $f(x)$, который дает одновременное приближение функций $f(x) \in W^r_{p(\cdot)}(M)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \leq \nu \leq r)$, удовлетворяющие оценкам, аналогичным **(1.5)**. Отметим сразу, что, как это было показано нами ранее, суммы Фурье по классическим ортогональным полиномам Чебышева, Лежандра и Якоби для этой цели не подходят. В настоящей статье поставленная задача решается с помощью смешанных рядов по полиномам Лежандра. Мы рассмотрим аппроксимативные свойства частичных сумм $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ смешанного ряда функции $f \in W^r_{p(\cdot)}(M)$ по полиномам Лежандра. Мы покажем, что $\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f, x)$ вблизи точек ± 1 дает приближение функции $f^{(\nu)}(x)$, существенно лучше, чем вдали от этих точек. Это обстоятельство играет важную роль при решении задачи приближения гладких функций $f(x)$ алгебро-тригонометрическими полиномами.

Некоторые сведения о полиномах Якоби

При конструировании смешанных рядов по полиномам Лежандра нам понадобятся некоторые свойства полиномов Якоби, которые для удобства ссылок мы соберем ниже. Полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ можно определить с помощью обобщенной формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!\, k(x)} \frac{d^n}{dx^n}\{(1 - x^2)^n k(x)\}, \tag{2.1}$$

где $k(x) = (1 - \mathrm{x})^\alpha (1 + x)^\beta$, α, β-произвольные действительные числа. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $k(x)$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) k(x) dx = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm}, \tag{2.2}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)} \tag{2.3}$$

и имеет место *формула Кристоффеля – Дарбу*

$$K_n^{\alpha,\beta}(x,y) = \sum_0^n \frac{P_k^{\alpha,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_k^{\alpha,\beta}} =$$

$$\frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2} \cdot \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y) - P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y}. \tag{2.4}$$

Нам понадобятся также следующие свойства :

производные

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \tag{2.5}$$

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\beta+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x), \tag{2.6}$$

где $(a)_0 = 1,\ (a)_\nu = a(a+1)\dots(a+\nu-1)$;

равенства

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k} \left(\frac{1-t}{2}\right)^k, \tag{2.7}$$

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \left\{(1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha,m+\beta}(x)\right\}, \tag{2.8}$$

$$P_n(x) = P_n^{0,0}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \{(1-x^2)^m P_{n-m}^{m,m}(x)\}, \tag{2.9}$$

где $k^{[0]} = 1,\ k^r = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$(1+x)P_m^{\alpha,\beta+1}(x) =$$

$$= \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\left[(n+\alpha+\beta+1)P_n^{\alpha,\beta}(x) + (n+1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\right]; \tag{2.10}$$

симметрия

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_{\mathrm{n}}^{\beta,\alpha}(x); \tag{2.11}$$

весовые оценки $(-1 \le x \le 1)$

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \tag{2.12}$$

$$|P_n^{\alpha,\beta}(x)| \le c(\alpha,\beta)(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n})^{-\alpha}(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n})^{-\beta}, \tag{2.13}$$

где здесь и всюду в дальнейшем $c(\alpha)$, $c(\alpha,\beta)$, $c(\alpha,\beta,\dots,\gamma)$ означают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах;

оценка интеграла, содержащего полином Якоби

$$\int_0^1 (1-x)^\gamma \left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| dx \asymp \begin{cases} n^{\alpha-2\gamma-2}, & 2\gamma < \alpha - \frac{3}{2}, \\ n^{-\frac{1}{2}}\ln n, & 2\gamma = \alpha - \frac{3}{2}, \\ n^{-\frac{1}{2}}, & 2\gamma > \alpha - \frac{3}{2}; \end{cases} \tag{2.14}$$

рекуррентная формула

$$P_{-1}^{\alpha,\beta}(x)=0,\quad P_0^{\alpha,\beta}(x)=1,\quad P_1^{\alpha,\beta}(x)=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{\alpha,\beta}(x)=$$

$$(2n+\alpha+\beta-1)\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x-\alpha^2+\beta^2\}P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)-$$

$$2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x), n=2,3,4,\dots; \tag{2.15}$$

асимптотическая формула

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta)=n^{-\frac{1}{2}}k(\theta)\left\{\cos(\lambda\theta+\gamma)+\tfrac{r_n(\theta)}{n\sin\theta}\right\}, \tag{2.16}$$

где α,β – произвольные действительные числа,

$$k(\theta)=k^{\alpha,\beta}(\theta)=\pi^{-\frac{1}{2}}\left(\sin\tfrac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\tfrac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

$$\lambda=\lambda_n^{\alpha,\beta}=n+\tfrac{\alpha+\beta+1}{2},\quad \gamma=\gamma_\alpha=-\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\right)\pi,$$

а для остаточного члена $r_n(\theta)=r_n^{\alpha,\beta}(\theta)$ имеет место оценка

$$|r_n(\theta)|\le c(\alpha,\beta,\delta)\quad \left(0<\tfrac{\delta}{n}\le\theta\le\pi-\tfrac{\delta}{n}\right). \tag{2.17}$$

Положим для $r\ge 1$

$$K_{r,m}(x,t)=\sum_{k=r}^{m}(2k+1)P_{k-r}^{r,r}(x)P_k(t). \tag{2.18}$$

Тогда имеет место равенство [28]

$$(x-t)K_{r,m}(x,t)=-rP_{r-1}(t)-\tfrac{(m+1)^2}{m-r+1}(1-x)P_{m-r}^{r+1,r}(x)P_m(t)-$$

$$-(m+1)(1-t)P_{m-r}^{r,r}(x)P_m^{1,0}(t)+\tfrac{(m+1)r}{m-r+1}P_{m-r}^{r,r}(x)P_m(t)$$

$$+\sum_{k=r}^{m}\tfrac{r^2}{k+1}P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t). \tag{2.19}$$

Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $r\ge 1$, $f\in W_1^r(M,-1,1)$, тогда мы можем определить коэффициенты Фурье – Лежандра функции $f^{(r)}(x)$ следующим образом

$$f_{r,k}=\tfrac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)P_k(t)dt\quad (k=0,1,\dots), \tag{3.1}$$

где $P_k(x)$ – полином Лежандра, нормированный условием $P_k(1)=1$. *Смешанный* ряд по полиномам Лежандра имеет [24–29] следующий вид

$$f(x)\sim D_{2r-1}(x)+\mathcal{F}_r(x), \tag{3.2}$$

в котором

$$D_{2r-1}(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\tfrac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!}(x+1)^\nu+$$

$$\tfrac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}f_{r,k}P_k(t)dt \tag{3.3}$$

– алгебраический полином степени $2r-1$, а функция $\mathcal{F}_r(x)$ определяется равенством

$$\mathcal{F}_r(x)=\tfrac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{\infty}\tfrac{f_{r,k}}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x). \tag{3.4}$$

Из результатов, полученных нами ранее, в частности, вытекает, что если $f \in W_2^r(M,-1,1)$, то ряд (3.4) сходится равномерно относительно $x \in [-1,1]$ и имеет место равенство

$$f(x) = D_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x). \tag{3.5}$$

Сопоставляя равенства (3.4) и (3.5), нетрудно заметить, что $D_{2r-1}(x)$ представляет собой интерполяционный полином Эрмита, интерполирущий функцию $f(x)$ и ее производные $f^{(\nu)}(x)$ при $0 \le \nu \le r-1$ в узлах ± 1, т. е.

$$D_{2r-1}(x) = \frac{(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \sum_{s=0}^{r-1-\nu} \frac{(r)_s}{2^s s!} \left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu-s}} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu-s}} \right]. \tag{3.6}$$

Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам возникли в связи с задачей одновременного приближения дифференцируемой функции и ее нескольких производных. Рассмотрим частичные суммы смешанного ряда (3.2) следующего вида

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x) = D_{2r-1}(x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x). \tag{3.7}$$

Ранее в наших работах было показано, что они успешно могут быть использованы в задаче одновременного приближения функции f, ее производных $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \le \nu \le r-1)$. В частности, если $f \in W_\infty^r(1,-1,1)$, то

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)|}{(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}}} \le \frac{c(r)}{n^{r-\nu}} \omega\left(f^{(\nu)}, \frac{1}{n}\right) \left[(1-x^2)^{\frac{1}{4}} \ln(n\sqrt{1-x^2}+1) + 1 \right], \tag{3.8}$$

где $n \ge 2r$, $0 \le \nu \le r-1$,

$$\omega(g,\delta) = \sup_{x,y:|x-y|\le\delta} |g(x) - g(y)|$$

– модуль непрерывности функции $g \in C[-1,1]$. Еще более удовлетворительный результат получается, если вместо операторов $\mathcal{Y}_{k+2r} = \mathcal{Y}_{k+2r}(f,x)$ $(n \le k \le n+m)$ мы возьмем их средние типа Валле-Пуссена

$$\mathcal{V}_N(f,x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \mathcal{Y}_{k+2r}(f,x), \tag{3.9}$$

где $N = n+m+2r$. А именно, нами было показано, что если $f \in W_\infty^r(1,-1,1)$, то при $0 < a \le \frac{m}{n} \le b$ имеют место оценки

$$\frac{|f^{\nu}(x) - \mathcal{V}_N^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}}} \le \frac{c(r,a,b)}{N^{r-\nu}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{N}\right), \quad x \in (-1,1), \quad 0 \le \nu \le r. \tag{3.10}$$

Оценки (3.8) и (3.10) в сочетании с обратными проблемами теории приближений дифференцируемых функций алгебраическими полиномами дают $(0 \le \nu \le r-1)$

$$\sup_{f \in W_\infty^r(1,-1,1)} \sup_{-1<x<1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)|}{(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}}} \asymp \frac{\ln n}{n^{r-\nu}}, \tag{3.11}$$

$$\sup_{f \in W_\infty^r(1,-1,1)} \sup_{-1<x<1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)|}{(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}}} \asymp \frac{1}{N^{r-\nu}}. \tag{3.12}$$

В дальнейшем, при рассмотрении задачи о приближении функций из $W_{p(\cdot)}^r(M,-1,1)$ алгебро-тригонометрическими полиномами, нам понадобятся оценки, аналогичные (3.11) и (3.12), в которых вместо $W_\infty^r(M,-1,1)$ будут фигурировать классы $W_{p(\cdot)}^r(M,-1,1)$. При получении таких оценок нам потребуется ряд свойств некоторых представляющих ядер операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и $\mathcal{V}_{n+2r}(f)$, рассматриваемых ниже в этом разделе.

Исходя из равенств (3.5) и (3.7) мы можем записать

$$R_{r,n}(f,x)=f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)=\frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{f_{r,k}}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x), \tag{3.13}$$

а отсюда и из (2.6), в свою очередь, имеем

$$R_{r,n}^{(\nu)}(f,x)=f^{(\nu)}(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)=\frac{(-1)^{r-\nu}(1-x^2)^{r-\nu}}{2^{r-\nu}}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{f_{r,k}}{k^{[r-\nu]}}P_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(x)=$$

$$f^{(\nu)}(x)-\mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu)}(f^{(\nu)}),x)=R_{r-\nu,n+\nu}(f^{(\nu)}). \tag{3.14}$$

Подставим в равенство (3.13) вместо $f_{r,k}$ его представление в виде интеграла (3.1) и перепишем (3.13) следующим образом

$$R_{r,n}(f,x)=\frac{(-1)^r(1-x^2)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{2^{r+1}}\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)Q_{r,n}(x,t)dt, \tag{3.15}$$

где

$$Q_{r,n}(x,t)=(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x)P_k(t). \tag{3.16}$$

Сразу заметим, что при переходе от (3.13) к (3.15) мы формально переставили знаки интегрирования и суммирования. Законность этого действия мы покажем ниже. Это зависит в том числе от того, какие условия мы будем накладывать на функцию $f^{(r)}(t)$.

Положим

$$Q(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k}P_{k-1}^{1,1}(x)P_k(t) \tag{3.17}$$

и исследуем поведение частичных сумм этого ряда вида

$$Q_m(x,t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{2k+1}{k}P_{k-1}^{1,1}(x)P_k(t) \tag{3.18}$$

при $x\in(-1,1)$.

Лемма 3.1. *Пусть* $-1<x<1$, $\frac{x-1}{2}\le t\le\frac{x+1}{2}$, $m\ge1$. *Тогда имеет место оценка*

$$|Q_m(x,t)|\le q(x), \tag{3.19}$$

где $0\le q(x)<\infty$, причем для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое число $c(\varepsilon)>0$, что $q(x)\le c(\varepsilon)$ при $-1+\varepsilon\le x\le1-\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $x=\cos\varphi$, $t=\cos\theta$. Тогда, пользуясь асимптотической формулой (2.16), мы можем записать

$$P_{k-1}^{1,1}(x)P_k(t)=\frac{k^{1,1}(\varphi)k^{0,0}(\theta)}{\sqrt{(k-1)k}}\times$$

$$\left\{\cos(\lambda_{k-1}^{1,1}\varphi+\gamma_1)+\frac{r_{k-1}^{1,1}(\varphi)}{(k-1)\sin\varphi}\right\}\left\{\cos(\lambda_k^{0,0}\theta+\gamma_0)+\frac{r_k^{0,0}(\theta)}{k\sin\theta}\right\}=$$

$$\frac{k^{1,1}(\varphi)k^{0,0}(\theta)}{\sqrt{(k-1)k}}\cos\left[(k+\frac{1}{2})\varphi-(1+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]\cos\left[(k+\frac{1}{2})\theta-\frac{\pi}{4})\right]+q_k(\varphi,\theta), \tag{3.20}$$

где при $0<\varepsilon_1\le\theta,\varphi\le\pi-\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$|q_k(\varphi,\theta)|\le\frac{c(\varepsilon_1)}{k^2}. \tag{3.21}$$

Из (3.18), (3.20) и (3.21) имеем

$$Q_m(x,t)=t+k^{1,1}(\varphi)k^{0,0}(\theta)\sum_{k=1}^{m}\frac{2k+1}{k\sqrt{(k-1)k}}\times$$

$$\cos\left[(k+\frac{1}{2})\varphi-(1+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]\cos\left[(k+\frac{1}{2})\theta-\frac{\pi}{4}\right]+\overline{q}_m(\varphi,\theta), \tag{3.22}$$

причем

$$\left|\overline{q}_m(\varphi,\theta)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{2k+1}{k} q_k(\varphi,\theta)\right| \le c(\varepsilon_1). \tag{3.23}$$

Далее, так как

$$\cos\left[(k+\tfrac{1}{2})\varphi - (1+\tfrac{1}{2})\tfrac{\pi}{2}\right]\cos\left[(k+\tfrac{1}{2})\theta - \tfrac{\pi}{4}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\cos\left[(k+\tfrac{1}{2})(\varphi+\theta)-\pi\right] + \cos\left[(k+\tfrac{1}{2})(\varphi-\theta)-\tfrac{\pi}{2}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{-\cos(k+\tfrac{1}{2})(\varphi+\theta) + \sin(k+\tfrac{1}{2})(\varphi-\theta)\right\},$$

то из (3.22) имеем

$$Q_m(x,t) = t + \frac{4}{\pi(\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\sum_{k=2}^{m} \frac{(2k+1)^2}{k\sqrt{k(k-1)}}\left[\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{2k+1} - \frac{\cos(2k+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{2k+1}\right] + \overline{q}_m(\varphi,\theta). \tag{3.24}$$

С другой стороны,

$$\frac{(2k+1)^2}{k\sqrt{(k-1)k}} = 4 + O(k^{-1}),$$

поэтому из (3.23) и (3.24) выводим

$$Q_m(x,t) = \overline{Q}_m(\varphi,\theta) + \frac{16}{\pi(1-x^2)^{\frac{3}{4}}(1-t^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{2k+1} - \sum_{k=0}^{m} \frac{\cos(2k+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{2k+1}\right], \tag{3.25}$$

где $|\overline{Q}_m(\varphi,\theta)| \le c(\varepsilon_1)$ при $0 < \varepsilon_1 \le \theta,\ \varphi \le \pi - \varepsilon_1$. Далее, если $0 \le u \le \pi/2$, то

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\sin(2k+1)u}{2k+1} = \int_0^u \sum_{k=0}^{m} \cos(2k+1)\tau d\tau = \int_0^u \frac{\sin(2m+1)\tau}{2\sin\tau} d\tau =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^u \frac{\sin(2m+1)\tau}{\tau} d\tau + \frac{1}{2}\int_0^u \sin(2m+1)\tau\left(\frac{1}{\sin\tau} - \frac{1}{\tau}\right) d\tau =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{(2m+1)u} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau + O\left(\frac{1}{m}\right) = O(1). \tag{3.26}$$

Кроме того,

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \frac{\cos(2k+1)v}{2k+1}\right| = \left|\int_v^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{m} \sin(2k+1)\tau d\tau\right| = \left|\int_v^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(m+1)\tau}{\sin\tau} d\tau\right|. \tag{3.27}$$

Пусть $x \in (-1,1)$ фиксировано, $\frac{x-1}{2} \le t \le \frac{x+1}{2}$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}[\arccos x + \min\{\arccos\frac{x+1}{2}, \pi - \arccos\frac{x-1}{2}\}]$. Тогда $\varepsilon_1 \le \arccos x < \pi - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \le \arccos\frac{x+1}{2} \le \theta = \arccos t \le \arccos\frac{x-1}{2} \le \pi - \varepsilon_1$, поэтому мы можем воспользоваться асимптотической формулой (2.16) и, как следствие, для $u = \frac{\varphi-\theta}{2}$, $v = \frac{\varphi+\theta}{2}$ получить равенство (3.25). Сопоставляя (3.25)-(3.27), мы замечаем, что если $x \in (-1,1)$, $\frac{x-1}{2} \le t \le \frac{x+1}{2}$, то $|Q_m(x,t)| \le q(x)$, причем если $-1+\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon$, то найдется такое число $c(\varepsilon) > 0$, что $|q(x)| < c(\varepsilon)$. Лемма 4.3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* $-1 < x < 1$, $t \in \left[-1, \frac{x-1}{2}\right] \cup [\frac{x+1}{2}, 1]$, $m \ge 1$. *Тогда имеет место оценка* $|Q_m(x,t)| \le q(x)$, *где* $0 \le q(x) < \infty$, *причем для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $c(\varepsilon) > 0$, *что* $q(x) \le c(\varepsilon)$ *при* $-1+\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon$.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{K}_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)P_{k-1}^{1,1}(x)P_k(t) \tag{3.28}$$

и произведем преобразование Абеля в правой части равенства (3.18). Это дает

$$Q_m(x,t)=\sum_{n=1}^{m-1}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]\mathcal{K}_n(x,t)+\frac{1}{m}\mathcal{K}_m(x,t). \tag{3.29}$$

С другой стороны, из (2.19) имеем

$$(x-t)\mathcal{K}_m(x,t)=-P_0(t)-\frac{(m+1)^2(1-x)}{m}P_{m-1}^{2,0}(x)P_m(t)+$$

$$(m+1)(1-t)P_{m-1}^{1,1}(x)P_m^{1,0}(t)+\frac{m+1}{m}P_{m-1}^{1,1}(x)P_m(t)+$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+1}P_k^{1,1}(x)P_k(t). \tag{3.30}$$

Для определенности мы можем считать, что $t\in[(1+x)/2,1]$, тогда $|x-t|\ge|x-\frac{1+x}{2}|=\frac{1-x}{2}$. Поэтому утверждение леммы 3.2 непосредственно вытекает из (3.29) и (3.30) с учетом весовой оценки (2.12).

Лемма 3.3. *Пусть* $-1<x<1$, $-1\le t\le 1$. *Тогда ряд (3.17) сходится, а его сумма при каждом фиксированном* x *представляет собой ограниченную функцию* $Q_x(t)=Q(x,t)$ *переменной* t.

Доказательство. Если $-1<x<1$, $\frac{x-1}{2}\le t\le\frac{x+1}{2}$ то сходимость ряда вытекает из того, что его частичные суммы $Q_m(x,t)$ допускают представление (3.24), в котором

$$\overline{q}_m(\varphi,\theta)=\sum_{k=1}^{m}\frac{2k+1}{k}q_k(\varphi,\theta)$$

при $m\to\infty$ сходится в силу оценки (3.21). Если же $-1<x<1$ и $t\in\left[-1,\frac{x-1}{2}\right]\cup[\frac{x+1}{2},1]$, то сходимость ряда (3.17) вытекает из (3.29) и (3.30) и весовой оценки (2.12). Ограниченность на $[-1,1]$ функции $Q_x(t)=Q(x,t)$ по t при фиксированном $x\in(-1,1)$ вытекает из лемм 4.3.1 и 4.3.2.

Лемма 3.4. *Пусть* $r\ge 1$ *целое,* $f\in W_1^r(M,-1,1)$, $x\in[-1,1]$. *Тогда если справедливо равенство (3.13), то его можно переписать в виде (3.15).*

Доказательство. Для $x\in(-1,1)$ и $r=1$ справедливость утверждения леммы 3.4 следует из лемм 3.1–3.3 и теоремы Лебега о возможности почленного интегрирования функционального ряда, частичные суммы которого мажорируются по модулю интегрируемой функцией. При $x=\pm1$ утверждение леммы 3.4 следует из того, что обе части равенства (3.15) обращаются в нуль. Если же $r\ge 2$, то справедливость равенства (3.15) следует из того, что в силу весовой оценки (2.12) ряд (3.16) сходится равномерно относительно $t\in[-1,1]$ при каждом фиксированном $x\in[-1,1]$.

Лемма 3.5. *Функции* $1,x,\dots,x^n,cos\pi x,sin\pi x,\dots,cosm\pi x,sinm\pi x$ *образуют на полуинтервале* $[-1,1)$ *систему Чебышева, т. е. произвольный нетривиальный полином вида* $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+a_{n+1}cos\pi x+a_{n+2}sin\pi x+\dots+a_{n+2m-1}cosm\pi x+a_{n+2m}sinm\pi x$ *обращается в нуль на* $[-1,1)$ *не более чем в* $n+2m$ *различных точках.*

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что «тригонометрическая часть» полинома $p(x)$ не обращается в нуль на $[-1,1)$. Предположим, что на полуинтервале $[-1,1)$ найдутся не менее $n+2m+1$ различных нулей полинома $p(x)$. Тогда по теореме Ролля тригонометрический полином $p^{(n)}(x)$ порядка $2m$ обращается в нуль на $[-1,1)$ не менее, чем в $2m+1$ различных точках полуинтервала $[-1,1)$, чего быть не может. Лемма доказана.

Некоторые неравенства для нормы $||f||_{p(\cdot)}(E)$

Из определения нормы $||f||_{p(\cdot)}(E)$ непосредственно вытекает следующее свойство «монотонности», а именно, если $|f(x)|\le|g(x)|$ при почти всех $x\in E$, то

$$||f||_{p(\cdot)}(E)\le||g||_{p(\cdot)}(E). \tag{4.1}$$

В дальнейшем, мы часто будем пользоваться этим свойством без напоминания неравенства (4.1). Другое полезное неравенство относится к случаю $1 \leq q(t) \leq p(t)$, а именно:

$$||f||_{q(\cdot)}([-1,1]) \leq 3^{\frac{1}{\underline{q}}}||f||_{p(\cdot)}([-1,1]) \quad (\underline{q} = \inf_{-1\leq t\leq 1} q(t)). \quad (4.2)$$

В самом деле, полагая для краткости $||f||_{p(\cdot)} = ||f||_{p(\cdot)}([-1,1])$, имеем

$$\int_{-1}^{1} \left|\frac{f(t)}{||f||_{p(\cdot)}}\right|^{q(t)} dt = \int_{-1}^{1} \left|\frac{f(t)}{||f||_{p(\cdot)}}\right|^{\frac{q(t)}{p(t)}p(t)} dt = \int_{E_1} + \int_{E_2}$$

где $E_1 = \{x \in [-1,1]: \frac{f(t)}{||f||_{p(\cdot)}} < 1\}$, $E_2 = [-1,1]\backslash E_1$. Далее

$$\int_{E_1} \left|\frac{f(t)}{||f||_{p(\cdot)}}\right|^{q(t)} dt \leq \int_{E_1} 1dt \leq 2,$$

$$\int_{E_2} \left|\frac{f(t)}{||f||_{p(\cdot)}}\right|^{\frac{q(t)}{p(t)}p(t)} dt \leq \int_{E_2} \left|\frac{f(t)}{||f||_{p(\cdot)}}\right|^{p(t)} dt \leq 1$$

Таким образом

$$\int_{-1}^{1} \left|\frac{f(t)}{||f||_{p(\cdot)}}\right|^{q(t)} dt \leq 3.$$

Отсюда имеем

$$\int_{-1}^{1} \left|\frac{f(t)}{3^{\frac{1}{\underline{q}}}||f||_{p(\cdot)}}\right|^{q(t)} dt \leq \int_{-1}^{1} \left|\frac{f(t)}{3^{\frac{1}{q(t)}}||f||_{p(\cdot)}}\right|^{q(t)} dt \leq 1.$$

Неравенство (4.2) доказано.

Приближение функций $f \in W^r_{p(\cdot)}(M,-1,1)$ операторами $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$

Напомним, что $\hat{P}$ означает класс переменных показателей $p = p(x) > 1$, заданных на $[-1,1]$, которые обладают следующими свойствами:

(A) $p(x)$ удовлетворяет условию Дини – Липшица

$$|p(x) - p(y)| \cdot \ln\frac{2}{|x-y|} \leq d, \quad x, y \in [-1,1]; \quad (5.1)$$

(B) Для каждого $p(x) \in \hat{P}$ найдутся такие числа p_1, p_2, δ_1, δ_2, что $-1 < -1 + \delta_1 < 1 - \delta_2 < 1)$, а на отрезках $[-1,-1+\delta_1]$, $[1-\delta_2, 1]$ $p(x)$ принимает постоянные значения p_1 и p_2, соответственно, т. е. $p(x) = p_1$ при $x \in [-1,-1+\delta_1]$, $p(x) = p_2$ при $x \in [1-\delta_2, 1]$.

Теорема 5.1. *Пусть $p(x) \in \hat{P}$, $p(\pm 1) > \frac{4}{3}$, $r \geq 1$, $f \in W^r_{p(\cdot)}(M,-1,1)$. Тогда смешанный ряд (3.2) сходится равномерно относительно относительно $x \in [-1,1]$ и имеет место равенство (3.5).*

Доказательство. Пусть

$$S_{n+r}(f^{(r)}, t) = \sum_{k=0}^{n+r} f_{r,k} P_k(t)$$

– частичная сумма порядка $n + r$ ряда Фурье функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Лежандра. Выберем функцию $\tilde{p} = \tilde{p}(x) \in \hat{P}$ так, чтобы было $\tilde{p}(\pm 1) < 4$ и при $x \in [-1,1]$ $\tilde{p}(x) \leq p(x)$. Тогда $f^{(r)}(x) \in L^{\tilde{p}(x)}(-1,1)$ и в силу неравенства (4.2)

$$\left|\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} S_{n+r}(f^{(r)}, t)dt\right| \leq$$

$$\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}|f^{(r)}(t)-S_{n+r}(f^{(r)},t)|dt$$

$$\leq 2^{r-1}\int_{-1}^{1} |f^{(r)}(t)-S_{n+r}(f^{(r)},t)|dt \leq$$

$$2^{r-1}c(\tilde{p})||1||_{s(\cdot)}\cdot||f^{(r)}-S_{n+r}(f^{(r)})||_{\tilde{p}(\cdot)}, \tag{5.2}$$

где $s(x)$ − функция, сопряженная с $\tilde{p}(x)$, т.е. $\frac{1}{s(x)}+\frac{1}{\tilde{p}(x)}=1$. Теперь обратимся к работе [35], в которой доказано, что если $\tilde{p}(x)\in\hat{P}$ и $\tilde{p}(\pm1)\in(\frac{4}{3},4)$, то система полиномов Лежандра $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является базисом в пространстве $L^{\tilde{p}(x)}(-1,1)$, поэтому

$$||f^{(r)}-S_{n+r}(f^{(r)})||_{\tilde{p}(\cdot)}\to 0, \text{при } n\to\infty, \tag{5.3}$$

так как $f\in W^r_{p(\cdot)}(1,-1,1)$ и, стало быть, $f^{(r)}\in L^{\tilde{p}(x)}(-1,1)$. Из (5.2) и (5.3) вытекает, что равномерно относительно $x\in[-1,1]$

$$\left|\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt-\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}S_{n+r}(f^{(r)},t)dt\right|\to 0 \tag{5.4}$$

при $n\to\infty$. С другой стороны, по формуле Тейлора с учетом равенства (2.9) имеем

$$\frac{1}{r-1}\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt=f(x)-\sum_{\nu}^{r-1}\frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!}(x+1)^{\nu}, \tag{5.5}$$

$$\frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^rk^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}P_k(t)dt \quad (k\geq r). \tag{5.6}$$

Из (5.6), в свою очередь, имеем

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}S_{n+r}(f^{(r)},t)=$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}\left(\sum_{k=0}^{r-1}+\sum_{k=r}^{n+r}\right)f_{r,k}P_k(t)dt=$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1}f_{r,k}P_k(t)dt+$$

$$\frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r}\sum_{k=r}^{n+r}\frac{f_{r,k}}{k^{[r]}}P_{k-r}^{r,r}(x), \tag{5.7}$$

С другой стороны, сопоставляя (3.3), (3.7) с (5.7), мы замечаем

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x} (x-t)S_{n+r}(f,t)dt=\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)-\sum_{\nu}^{r-1}\frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!}(x+1)^{\nu}. \tag{5.8}$$

Из (5.5) и (5.8) имеем

$$|f(x)-\mathcal{Y}_{n+2r}(f,x)|=$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\left|\int_{-1}^{x} (x-t)f^{(r)}(t)dt-\int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}S_{n+r}(f^{(r)},t)dt\right| \tag{5.9}$$

Утверждение теоремы 5.1 вытекает из (5.4) и (5.9).

Теорема 5.2. *Пусть* $r\geq1$, $0\leq\nu\leq r-1$, $p(x)\in\hat{P}$, $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=1$, $p(\pm1)>\frac{4}{3}$, $x\in(-1,1)$. *Тогда*

$$\sup_{f\in W^r_{p(\cdot)}(M,-1,1)}\frac{|f^{(\nu)}(x)-\mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(x)|}{(1-x^2)^{\frac{(r-\nu)}{2}-\frac{1}{4}}}=M||Q_{r-\nu,n+\nu}(x,*)||^*_{q(\cdot)},$$

где $q(x)=\frac{p(x)}{p(x)-1}$ − сопряженная для $p(x)$, $||f||^*_{p(\cdot)}=\sup_{||g||_{q(\cdot)}\leq1}\int_E f(x)g(x)dx$.

Доказательство. Из теоремы 5.1 следует, что если $p(t)\in\hat{P}$ и $p(\pm1)>\frac{4}{3}$, то для

$f \in W^r_{p(\cdot)}(M,-1{,}1)$ имеет место равенство (3.13). Но тогда в силу леммы 3.4 справедливо равенство (3.15), в котором $f^{(r)}(x) \in L^{p(x)}(-1{,}1)$. Воспользуемся равенством (3.15) для функции $f^{(\nu)}(x)$ $(0 \le \nu \le r-1)$, тогда с учетом (3.14) получим $(f^{(\nu)} \in W^{r-\nu}_{p(\cdot)}(M,-1{,}1))$

$$f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x) = \frac{(-1)^{r-\nu}}{2^{r-\nu+1}}(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}}\int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)Q_{r-\nu,n+\nu}(x,t)dt, \tag{5.10}$$

где

$$Q_{r-\nu,n+\nu}(x,t) = (1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}+\frac{1}{4}}\sum_{k=n+r+1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^{[r-\nu]}}P^{r-\nu,r-\nu}_{k-r+\nu}(x)P_k(t), \tag{5.11}$$

для каждого фиксированного $x \in [-1{,}1]$ представляет собой ограниченную функцию переменной $t \in [-1{,}1]$ (см. лемму 3.3). Поэтому утверждение теоремы 5.2 непосредственно вытекает из равенства (5.10) и определения нормы $||Q_{r-\nu,n+\nu}(x,*)||^*_{p(\cdot)}$.

В связи с теоремой 5.2 возникает вопрос о поведении величины $||Q_{r,n}(x,*)||^*_{q(\cdot)}$ при $n \to \infty$. С другой стороны, в силу эквивалентности норм $||f||^*_{q(\cdot)}$ и $||f||_{q(\cdot)}$ эта задача сводится к вопросу о поведении при $n \to \infty$ нормы

$$||Q_{r,n}(x,*)||_{q(\cdot)} = \inf\left\{\alpha > 0 \colon \int_{-1}^{1}\left|\frac{Q_{r,n}(x,t)}{\alpha}\right|^{q(t)} dt \le 1\right\}. \tag{5.12}$$

Поскольку вместе с $p(x)$ его сопряженный показатель $q(t) = \frac{p(t)}{p(t)-1} \in \hat{\mathcal{P}}$, следовательно $\overline{q} = \operatorname{essup}_{x\in[-1,1]} q(x) < \infty$, то

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{Q_{r,n}(x,t)}{||Q_{r,n}(x,*)||_{q(\cdot)}}\right|^{q(t)} dt = 1.$$

Ниже нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Прежде всего заметим, что если $\Omega = \bigcup_{k=1}^{s}\Omega_k$, где Ω_k – измеримы и $\Omega_j \cap \Omega_l = \emptyset$ при $j \ne l$, то

$$||f||_{q(\cdot)}(\Omega) \le \sum_{j=1}^{s}||f||_{q(\cdot)}(\Omega_j). \tag{5.13}$$

В самом деле, полагая $f(x) = \sum_{j=1}^{s} f_j(x)$, где

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega_j, \\ 0 & x \notin \Omega_j, \end{cases}$$

имеем

$$||f||_{q(\cdot)}(\Omega) \le \sum_{j=1}^{s}||f_j||_{q(\cdot)}(\Omega) = \sum_{j=1}^{s}||f||_{q(\cdot)}(\Omega_j).$$

Положим

$$K_{r,m,n}(x,t) = K_{r,\mathrm{m}}(x,t) - K_{r,n}(x,t) = \sum_{k=n+1}^{m}(2k+1)P^{r,r}_{k-r}(x)P_k(x) \tag{5.14}$$

Тогда из (2.18) и (2.19) вытекает следующее равенство

$$(x-t)K_{r,m,n}(x,t) = X_1 + X_2 + X_3 + X_4, \tag{5.15}$$

где

$$X_1 = -\frac{(m+1)^2}{m-r+1}(1-x)P^{r+1,r}_{m-r}(x)P_m(t) + \frac{(n+1)^2}{n-r+1}(1-x)P^{r+1,r}_{n-r}(x)P_n(t),$$

$$X_2 = -(m+1)(1-t)P^{r,r}_{m-r}(x)P^{1,0}_{m}(t) + (n+1)(1-t)P^{r,r}_{n-r}(x)P^{1,0}_{n}(t),$$

$$X_3 = \frac{(m+1)r}{m-r+1}P^{r,r}_{m-r}(x)P_m(t) - \frac{(n+1)r}{n-r+1}P^{r,r}_{n-r}(x)P_n(t),$$

$$X_4 = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{r^2}{k+1}P^{r,r}_{k-r+1}(x)P_k(t).$$

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Лемма 5.1. *Пусть* $r=1,\ p(x)\in\hat{\mathcal{P}},\ p(\pm 1)\in(\frac{4}{3},4)\ \ q=q(x),\ \frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=1,\ x\in[-1,1],$ $n<m$. *Тогда*

$$(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2p(x)}}||K_{r,m,n}(x,*)||_{q(\cdot)}\le c(r,q)m^{\frac{1}{p(x)}}(1+\ln\frac{m}{n}).$$

Лемма 5.2. *Пусть* $r\ge 1,\ p(x)\in\hat{P},\ \frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=1,\ x\in[-1,1]$. *Тогда*

$$||Q_{r,n}(x,*)||_{q(\cdot)}([-1,1])\le c(r,q)n^{-r+\frac{1}{p(x)}}(1-x^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2p(x)}},$$

где ядро $Q_{r,n}(x,t)$ определено равенством **(3.16)**

Доказательство. Заметим, что $|Q_{r,n}(-x,t)|=|Q_{r,n}(x,t)|$, следовательно,

$$||Q_{r,n}(x,*)||_{q(\cdot)}([-1,1])=||Q_{r,n}(x,*)||_{\hat{q}(\cdot)}([-1,1]),$$

где $\hat{q}(t)=q(-t)$ $(t\in[-1,1])$. Поскольку функция $\hat{q}(t)=q(-t)$ вместе с $q(t)$ входит в $\hat{P}$, то нам достаточно ограничиться случаем $0\le x\le 1$. В этом случае в правой части равенства **(3.16)** произведем преобразование Абеля, в результате чего имеем

$$Q_{r,n}(x,t)=\sum_{m=n+r+1}^{\infty}\left[\frac{1}{m^{[r]}}-\frac{1}{(m+1)^{[r]}}\right]K_{r,m,n+r}(x,t)(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}},\tag{5.16}$$

где ядра $K_{r,m,n+r}(x,t)$ определены равенством **(5.14)**. Законность перехода от **(3.16)** к **(5.89)** при $r=1$ следует, например, из леммы **3.1**, а при $r\ge 2$ это вытекает непосредственно из равенства **(5.14)** и весовой оценки **(2.11)**. Поскольку

$$\frac{1}{m^{[r]}}-\frac{1}{(m+1)^{[r]}}=\frac{1}{(m+1)m^{[r]}},$$

то **(5.16)** можно записать так

$$Q_{r,n}(x,t)=\sum_{m=n+r+1}^{\infty}\frac{r}{(m+1)m^{[r]}}K_{r,m,n+r}(x,t)(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}},$$

откуда следует, что

$$||Q_{r,n}(x,*)||_{q(\cdot)}([-1,1])\le$$

$$\sum_{m=n+r+1}^{\infty}\frac{m(1-x^2)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(m+1)m^{[r]}}||K_{r,m,n+r}(x,*)||_{q(\cdot)}([-1,1]).\tag{5.17}$$

Продолжим оценку. Пользуясь леммой **5.2**, из **(5.17)** выводим

$$||Q_{r,n}(x,*)||_{q(\cdot)}([-1,1])\le c(r,q)\sum_{m=n+r+1}^{\infty}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2p(x)}}m^{\frac{1}{p(x)}}}{(m+1)m^{[r]}}\left(1+\ln\frac{m}{n+r}\right)\le$$

$$\le c(r,q)(1-x^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2p(x)}}\sum_{m=n+r+1}^{\infty}m^{-r+\frac{1}{p(x)}}\left(1+\ln\frac{m}{n+r}\right)\le$$

$$c(r,q)(1-x^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2p(x)}}n^{-r-1+\frac{1}{p(x)}}\sum_{m=n+r+1}^{\infty}\left(\frac{m}{n+1}\right)^{-r-1+\frac{1}{p(x)}}\left(1+\ln\frac{m}{n+r}\right)$$

$$\le c(r,q)(1-x^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2p(x)}}n^{-r+\frac{1}{p(x)}}\int_1^{\infty}t^{-r-1+\frac{1}{p(x)}}(1+\ln t)dt\le$$

$$c(r,q)(1-x^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2p(x)}}n^{-r+\frac{1}{p(x)}}.$$

Лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. *Пусть* $r\ge 1$, $0\le\nu\le r-1$, $p(x)\in\hat{P}$, $\frac{4}{3}<p(\pm 1)<4$, $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=1$, $x\in[-1,1]$. *Тогда*

$$||Q_{r-\nu,n+1}(x,*)||_{q(\cdot)}([-1,1])\le c(r,q)n^{-r+\nu+\frac{1}{p(x)}}(1-x^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2p(x)}}.$$

Доказательство этой леммы непосредственно вытекает из леммы 5.2, если в ней заменить r на $r-\nu$ а n на $n+\nu$ и учесть равенство (5.11).

Теорема 5.3. *Пусть* $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $p(x) \in \hat{P}$, $p(\pm 1) \in (\frac{4}{3}, 4)$, $x \in [-1,1]$, $f \in W^r_{p(\cdot)}(M)$. *Тогда*

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)| \leq c(r,p)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu+\frac{1}{p(x)}},$$

причем

$$||f^{(r)} - \mathcal{Y}^{(r)}_{n+2r}(f)||_{p(\cdot)}([-1,1]) \leq c(r,p)E_{n+r}(f^{(r)})_{p(\cdot)},$$

где $E_m(g)_{p(\cdot)}$ – наилучшее приближение функции $g \in L^{p(x)}([-1,1])$ алгебраическими полиномами степени не выше m.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5.2, тогда

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)| \leq c(r,p)(1-x^2)^{\frac{r-\nu}{2}-\frac{1}{4}}||Q_{r-\nu,n+\nu}(x,*)||_{q(\cdot)},$$

где $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$. Теперь обратимся к лемме 5.3. Это дает

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}^{(\nu)}_{n+2r}(f,x)| \leq$$

$$c(r,p)Mn^{-r+\nu+\frac{1}{p(x)}}(1-x^2)^{\frac{r-\nu-\frac{1}{p(x)}}{2}} = c(r,p)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{p(x)}}.$$

Тем самым доказано утверждение теоремы 5.3, относящееся к случаю $0 \leq \nu \leq r-1$. Если же $\nu = r$, то $\mathcal{Y}^{(r)}_{n+2r}(f,x) = S_{n+r}(f^{(r)},x)$ – сумма Фурье – Лежандра функции $f^{(r)} \in L^{p(x)}([-1,1])$ порядка $n+r$, которая в силу свойства базисности системы полиномов Лежандра в $L^{p(x)}([-1,1])$ с $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}$ и $p(\pm 1) \in (-\frac{4}{3}, 4)$ доставляет функции $f^{(r)}$ наилучший порядок приближения по норме пространства $L^{p(x)}([-1,1])$. Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы 5.3, относящееся к случаю $\nu = r$.

Приближение гладких функций алгебро-тригонометрическими полиномами

Вернемся теперь к задаче о приближении функций $f \in W^r_{p(\cdot)}(M,-1,1)$ алгебро-тригонометрическими полиномами. Мы рассмотрим сначала случай, когда $f \in W^r_\infty(M)$. В силу известной теоремы Теляковского – Гопенгауза ([4], [16]) найдется такая последовательность алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}_{n=2r+1}^{\infty}$, что для каждого $0 \leq \nu \leq r$

$$\left|f^{(\nu)}(x) - P_n^{(\nu)}(x)\right| \leq C_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{r-\nu}\omega\left(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right). \tag{6.1}$$

Из (6.1) следует, в частности, что

$$f^{(\nu)}(\pm 1) = P_n^{(\nu)}(\pm 1) \quad \text{при} \quad \nu = 0,1,\dots,r, \tag{6.2}$$

а для функции $g_n(x) = f(x) - P_n(x)$ справедлива оценка

$$||g_n^{(\nu)}|| \leq \frac{C_r}{n^{r-\nu}}\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right). \tag{6.3}$$

Из (6.2) и (6.3) непосредственно вытекает, что функция $g_n(x)$ может быть продолжена на всю числовую ось 2-периодически с сохранением гладкости, т.е. так, чтобы продолженная функция

$$g_n(x) \in \widetilde{W}^\nu_\infty\left(\frac{C_r}{n^{r-\nu}}\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)\right), (6.4)$$

где через $\widetilde{W}_{\infty}^{\nu}(M)$ мы обозначаем класс 2-периодических ν -раз непрерывно дифференцируемых функций $g(x)$, для которых норма определяется равенством

$$||g|| = \max_{-1\le x\le 1}|g(x)|.$$

Из **(6.4)** в силу известных теорем Фавара о приближении классов $\widetilde{W}_{\infty}^{\nu}(M)$ тригонометрическими полиномами имеем

$$E_m^T(g_n) \le \frac{c_r}{\pi^\nu m^\nu}\frac{\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)}{n^{r-\nu}} \quad (0\le \nu \le r), \tag{6.5}$$

где $E_m^T(g_n)$ – наилучшее приближение функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами порядка m. Выберем ν следующим образом: если $n \ge m$ положим $\nu = 0$, а если $m > n$, то возьмем $\nu = r$. Тогда из **(6.5)** выводим

$$E_m^T(g_n) \le \frac{c_r}{(\max\{n,m\})^r}\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right) \le \frac{c_r}{(n+m)^r}\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right). \tag{6.6}$$

С другой стороны, очевидно, что $E_{n,m}(f) \le E_m^T(g_n)$, поэтому из **(6.6)** выводим

$$E_{n,m}(f) \le \frac{c_r}{(n+m)^r}\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right). \tag{6.7}$$

В качестве следствия из этой оценки мы можем сформулировать следующее утверждение. Положим

$$E_{n,m}\big(W_\infty^r(1)\big) = \sup_{f\in W_\infty^r(1)} E_{n,m}(f). \tag{6.8}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $r \ge 1$, $n \ge 2r+1$, $m \ge 0$. *Тогда имеет место оценка*

$$E_{n,m}\big(W_\infty^r(1)\big) \asymp (n+m)^{-r}, \tag{6.9}$$

другими словами, найдутся такие положительные числа $c_1(r)$, $c_2(r)$, зависящие лишь от r, что

$$\frac{c_1(r)}{(n+m)^r} \le E_{n,m}\big(W_\infty^r(1)\big) \le \frac{c_2(r)}{(n+m)^r}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Правая из оценок **(6.10)** непосредственно вытекает из **(6.7)**, поэтому нам остается доказать левую из этих оценок. Рассмотрим функцию $f_0(x) = \frac{1}{(\pi(n+2m+1))^r}\cos\pi(n+2m+1)x$. Очевидно, что $f_0 \in W_\infty^r(1)$. Обозначим через $\tau_{n,m}^*(x) = p_n^*(x) + T_m^*(x)$ – алгебро-тригонометрический полином наилучшего приближения к функции f порядка $n+m$. Поскольку в силу леммы **3.5** функции $1, x, \dots, x^n$, $\cos\pi x, \sin\pi x, \dots, \cos m\pi x, \sin m\pi x$ образуют систему Чебышева, то в силу теоремы Чебышева об альтернансе $\tau_{n,m}^*(x)$ тождественно совпадает с нулем, стало быть, $g_n(x) = f(x) - p_n^*(x) - T_m^*(x) = f_0(x)$. Отсюда имеем

$$E_{n,m}(f_0) = ||f_0 - p_n^* - T_n^*|| = \frac{1}{(\pi(n+2m+1))^r}.$$

Тем самым, нижняя из оценок **(6.10)** и вместе с ней теорема **4.6.1** доказаны.

Теперь мы перейдем к случаю, когда $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r(M)$, где $p(x) \in \hat{P} \cap \tilde{P}$, $4/3 < p(\pm 1) < 4$. В этом случае имеет место

Теорема 6.2. *Пусть* $0 \le \nu \le r-1$, $p(x) \in \hat{P} \cap \tilde{P}$, $4/3 < p(\pm 1) < 4$, $n \ge 2r+1$, $m \ge 0$. *Тогда для* $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r(M)$ *и каждой пары* (n,m) *найдется алгебро-тригонометрический полином* $p_n(x) + \tau_m(x)$, *для которого равномерно относительно* $x \in [-1,1]$ *справедлива оценка*

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x) - \tau_m^{(\nu)}(x)| = c(r,M,p)(n+m)^{-r+\nu+\frac{1}{p(x)}}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r(M)$. Рассмотрим два случая: **1)** $m \le n$; **2)** $n < m$.

В первом из этих случаев мы положим $p_{n+2r}(x)=Y_{n+2r}(f,x)$, $\tau_m(x)\equiv 0$ и будем приближать функцию $f(x)$ и ее производные алгебро-тригонометрическим полиномом $p_{n+2r}(x)+\tau_m(x)$ и его производными. Из теоремы 5.3 непосредственно вытекает оценка

$$|f^{(\nu)}(x)-p_{n+2r}^{(\nu)}(x)-\tau_m^{(\nu)}(x)|\le c(r,p)(n+m)^{-r+\nu+\frac{1}{p(x)}}. \qquad (6.11)$$

Во втором случае мы рассмотрим функцию $g_n(x)=f(x)-Y_{n+2r}(f,x)$. Обозначим через $S_m(g_n,x)=\sum_{k=-m}^{m}\hat{g}_{n,k}e^{i\pi kx}$ частичную сумму порядка m тригонометрического ряда Фурье функции $g_n=g_n(x)$. Из второго утверждения теоремы 5.3 следует, что $g_n\in \widetilde{W}_{p(\cdot)}^{r}(c(r,p)E_{n+r}(f^{(r)})_p))$. Поэтому из теоремы 6.2 имеем

$$|f^{(\nu)}(x)-Y_{n+2r}^{(\nu)}(f,x)-S_m^{(\nu)}(g_n,x)|\le$$

$$c(r,p)m^{-r+\nu+\frac{1}{p(x)}}\le c(r,p)(m+n)^{-r+\nu+\frac{1}{p(x)}}. \qquad (6.12)$$

Утверждение теоремы 6.2 вытекает из (6.11) и (6.12).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00191).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарапудинов И.И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632.

2. *Шарапудинов И.И.* Приближение функций в метрике пространства $L^{p(x)}([a,b])$ и квадратурные формулы // Constructive function theory'81. Procedings of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna, June 1–5, 1981. С. 189–193.

3. *Orlicz W.* Uber konjugierte Exponentenfolgen // Studia Math. 1931. Vol. 3. P. 200–212.

4. *Nakano H.* Modulared Semi-ordered Linear Spaces. Tokyo: Maruzen Co., Ltd., 1950.

5. *Nakano H.* Topology and Topological Linear Spaces. Tokyo: Maruzen Co., Ltd., 1951.

6. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

7. *Musielak J. and Orlicz W.* On modular spaces // Studia Math. 1959. Vol. 18. P. 49–65.

8. *Tsenov I.V.* Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s // (Russian) Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ. 1961. Vol. 7. P. 25–37.

9. *Колмогоров А.Н.* Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes // Studia Math. 1934. Vol. 5. P. 29–33.

10. *Шарапудинов И.И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Матем. сборник. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283.

11. *Шарапудинов И.И.* О равномерной ограниченности в $L^p(p=p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Матем. заметки. 1996. Т. 59, вып. 2. С. 291–302.

12. *Diening L.* Maximal function on generalized Lebesgue spaces *Lp*(·) // Math. Inequal. Appl. 2004. Vol. 7. P. 245–253.

13. *Diening L. and Ruňička M.* Calderon-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems related to fluid dynamics // J. Reine Angew. Math. 2003. N 563. P. 197–220.

14. *Diening L., Hästö P. and Nekvinda A.* Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Proceedings of the Conference held in Milovy, Bohemian-Moravian Uplands, May 28 – June 2, 2004. Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republick, Praha.

15. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent. Lecture Notes in Mathematics 2017 / *L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ruňička* // Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 2011.

16. *Zhikov V.V.* Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory // Math. USSR Izv. 1987. Vol. 29, N 1. P. 33–66. [Translation of Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1986. Vol. 50, N 4. P. 675–710, 877].

17. *Zhikov V.V.* Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system // Differ. Equ. 1997. Vol. 33, N 1. P. 108–115. [Translation of Differ. Uravn. 1997 Vol. 33. N 1. P. 107–114, 143].

18. *Zhikov V.V.* On some variational problems // Russian J. Math. Phys. 1997. Vol. 5, N 1. P. 105–116 (1998).

19. *Kokilashvili V., Samko N. and Samko S.* Singular operators in variable spaces $L^{p(\cdot)}(\Omega,\rho)$ with oscillating weights // Math. Nachr. 2007. Vol. 280. P. 1145–1156.

20. *Kokilashvili V. and Samko S.* Singular integral equations in the Lebesgue spaces with variable exponent // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2003. Vol. 131. P. 61–78.

21. *Kokilashvili V. and Samko S.* Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent // Georgian Math. J. 2003. Vol. 10. P. 145–156.

22. *Kokilashvili V. and Samko S.* Weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents of classical operators on Carleson curves // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2005. Vol. 138. P. 106–110.

23. *Kokilashvili V. and Samko S.* Singular Integrals in Weigted Lebesgue Spaces with Variable Exponent // Georgian Math. J. 2003. Vol. 10, N 1. P. 145–156.

24. *Samko S.* Convolution type operators in $L^{p(x)}$ // Integr. Transform. Spec. Funct. 1998. Vol. 7, N 1–2. P. 123–144.

25. *Samko S.* Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces // Fract. Calc. Appl. Anal. 2003. N 6. P. 355–362.

26. *Samko S.* On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: maximal and singular operators // Integral Transforms Spec. Funct. 2005. Vol. 16, N 5–6. P. 461–482.

27. *Guven A. and Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // Journal of Math. Inequalities. 2010. Vol. 4, N 2. P. 285–299.

28. *Akgun R. and Kokilashvili V.* On converse theorems of trigonometric approximation in weghted variable exponent Lebesgue spaces // Banach J. Math. Anal. 2011. Vol. 5, N 1. P. 70–82.

29. *Akgun R.* Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth // Georgian Math. J. 2011. N 18. P. 203–235.

30. *Guven A.* Trigonometric approximation by matrix transforms in $L^{p(x)}$ // Anal. and Appl. 2012. Vol. 10, N 1. P. 47–65.

31. *Akgun R. and Kokilashvili V.* The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces // Georgian Math. J. 2011. Vol. 18, N 3. P. 399–423.

32. *Akgun R.* Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent // Ukr. Math. Journal. 2011. Vol. 63, N 1. P. 3–23.

33. *Шарапудинов И.И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Матем. сборник. 1986. Т. 130 (172), № 2 (6). С. 275–283.

34. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}$ // Anal. Math. 2007. Т. 33, № 2. С. 135–153.

35. *Шарапудинов И.И.* О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве $L^{p(x)}(-1,1)$ с переменным показателем $p(x)$ // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 1. С. 137–160.

36. *Шарапудинов И.И.* Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье – Лежандра // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 1. Р. 143–160.

37. *Шарапудинов И.И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сб. Т. 194, № 3. С. 115–148.

38. *Шарапудинов И.И.* Аппроксимативные свойства операторов $Y_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Матем. заметки. Т. 72, вып. 5. С. 765–795.

39. *Шарапудинов И.И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала, 2004. 276 с.

40. *Шарапудинов И.И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 135–154.

41. *Шарапудинов И.И.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра // Матем. заметки. Т. 84, вып. 3. С. 452–471.

Поступила в редакцию 12.03.2014 г.
Принята к печати 26.06.2014 г.