ВЕСТНИК ДАГЕСТАНСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА. 2013. № 51. С. 13–17.

УДК 517.51

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ В $L_{2\pi}^{p(x)}$ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ

Т. Н. Шах-Эмиров

Отдел математики и информатики ДНЦ РАН

Исследуется вопрос о равномерной ограниченности семейств многомерных интегральных операторов свертки в пространствах Лебега с переменным показателем.

Multidimentional integral convolution operators' families' uniform boundedness in Lebesgue spaces with variable exponent is investigated in this paper.

Ключевые слова: пространство Лебега с переменным показателем; операторы свертки; условие Дини – Липшица.

Keywords: Lebesgue spaces with variable exponent; convolution operators; Dini – Lipschitz condition.

1. Введение

Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)$, $p=p(x)$ – измеримая существенно ограниченная функция, заданная на R^n, 2π-периодическая по каждой из переменных x_k $(1\le k\le n)$ и такая, что $p(x)\ge 1$ для всех $x\in R^n$.

Через $L_{2\pi}^{p(x)}$ обозначим пространство измеримых 2π-периодических по каждой переменной функций $f=f(x)$ таких, что

$$\int_{T^n} |f(x)|^{p(x)}\,dx<\infty,$$

где $T^n=[-\pi,\pi)^n$. Пространство $L_{2\pi}^{p(x)}$ нормируемо и одну из эквивалентных норм можно определить ([1]), полагая для $f\in L_{2\pi}^{p(x)}$

$$\|f\|_{p(\cdot)}=\inf\{\alpha>0:\int_{T^n}\left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)}dx\le 1\}. \qquad (1)$$

Ниже нам понадобится множество параметров λ вида $K=I+\bigcup_{\eta\ge 0}\eta S$, где S – компактное подмножество из $(0,\infty)^n$, $I=(1,1,\dots,1)\in R^n$. Тогда для K найдутся константы m_i^j и M_i^j $(i,j=1,\dots,n, i\ne j)$, зависящие только от K и такие, что для любого вектора $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K$ имеют место неравенства $m_i^j\lambda_i\le\lambda_j\le M_i^j\lambda_i,(i\ne j).$ Пусть для каждого $\lambda\in K$ задана 2π-периодическая по каждой переменной x_k $(1\le k\le n)$ и существенно ограниченная функция $k_\lambda=k_\lambda(x)$. Тогда можно определить линейный оператор, действующий в $L_{2\pi}^{p(x)}$:

$$\mathrm{K}_\lambda f=(\mathrm{K}_\lambda f)(x)=\int_{T^n} f(t)k_\lambda(t-x)dt. \qquad (2)$$

В настоящей статье рассмотрена задача о нахождении достаточных условий на переменный показатель $p(x)$, которые гарантируют равномерную ограниченность по $\lambda\in K$ семейства операторов (2) в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$. Эта задача, в случае $n=1$, была решена в работе [2], в которой было показано, что если переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет условию Дини – Липшица $|p(x')-p(x'')|\ln\dfrac{1}{|x'-x''|}=O(1)$, то для равномерной ограниченности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ семейства операторов (2) достаточно выполнения следующих условий: $\int_{-\pi}^{\pi}|k_\lambda(x)|\,dx\le c_1$, $\sup\limits_x|k_\lambda(x)|\le c_2\lambda^\nu$, $|k_\lambda(x)|\le c_3$ при $\lambda^{-\gamma}\le|x|\le\pi$, где $\nu,\gamma,c_j>0$ и не зависят от λ. Схожая задача рассмотрена в работе [3], где доказывается равномерная ограниченность операторов свертки вида $K_\varepsilon f=\int_\Omega K_\varepsilon(x-y)f(y)dy$, $K_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}K(\frac{x}{\varepsilon})$, где $K_\varepsilon(x)$ – измеримая функция с носителем из шара $B_R=B(0,R)$, в пространствах $L^{p(x)}(\Omega)$ ($\Omega\subseteq R^n$ – ограниченная область в R^n).

В настоящей статье результат из [2] переносится на многомерный случай.

§2. Условия равномерной ограниченности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ семейств интегральных операторов свертки

Всюду ниже мы будем считать, что $k_\lambda=k_\lambda(x)$ – измеримая 2π-периодическая функция. Пусть $\|\lambda\|=\sqrt{\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2}$. Будем говорить, что семейство ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in K}$ удовлетворяет условиям $A)$, $B)$, $C)$, **если имеют место следующие оценки:**

$A)\int\limits_{T^n}|k_\lambda(x)|\,dx\le c_1$,

$B)\sup\limits_x|k_\lambda(x)|\le c_2\|\lambda\|^\nu$,

$C)\ |k_\lambda(x)|\le c_3$ при $x\in T^n\setminus\prod\limits_{i=1}^n[-\lambda_i^{-\gamma},\lambda_i^{-\gamma}],$

где $\nu,\gamma,c_j>0$ и не зависят от λ.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $k_\lambda=k_\lambda(x)$ $(\lambda\in K)$ удовлетворяет условиям $A)-C)$. Тогда, если $p=p(x)$ – 2π – периодическая функция по каждой переменной, для которой выполнено условие Дини – Липшица*

$$|p(x')-p(x'')|\ln\frac{1}{\|x'-x''\|}=O(1),\quad x',x''\in T^n, \tag{3}$$

то семейство операторов $\{\mathrm{K}_\lambda\}_{\lambda\in K}$ равномерно ограничено в $L_{2\pi}^{p(x)}$.

Доказательство. Пусть $N_i=[\lambda_i^{-\gamma}]$ – целая часть $\lambda_i^{-\gamma}$, $h_i=\frac{1}{N_i}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$, $t=(t_1,\ldots,t_n)$, $k_i=0,\pm1,\ldots$, где $i=1,\ldots,n$,

$$(x_{k_1},\ldots,x_{k_n})=((k_1h_1-1)\pi,\ldots,(k_nh_n-1)\pi), \tag{4}$$

$$s_{k_1,\ldots,k_n}=\min\{p(x)\,|\,x_{k_i-1}\le x_i\le x_{k_i+2}\}, \tag{5}$$

$$p_t(x)=s_{k_1,\ldots,k_n}\quad(x_{k_i}-t_i\le x_i<x_{k_i+1}-t_i). \tag{6}$$

Поскольку $p_t(x)=p_\theta(x+t)$ (θ – нулевой элемент R^n), то из (4) – (6) следует, что

$$p_t(x)\le p(x)\quad(|t_i|\le\pi h_i, 1\le i\le n). \tag{7}$$

Через $\prod_x$ обозначим прямоугольную окрестность точки x:

$$\prod\nolimits_x=\prod_{i=1}^n(x_i-\pi h_i,x_i+\pi h_i).$$

Множество индексов $\{1,\ldots,n\}$ разобьем на 3 подмножества:

$$J_1 = \{ j : (x_j - \pi h_j, x_j + \pi h_j) \subset (-\pi, \pi)\},$$

$$J_2 = \{ j : x_j - \pi h_j < -\pi\},$$

$$J_3 = \{ j : x_j + \pi h_j > \pi\}$$

и определим для $x \in T^n$ множество E_x следующим образом:

$$E_x = T^n \setminus \left(\prod_{j\in J_1} (x_j - \pi h_j, x_j + \pi h_j) \times \prod_{j \in J_2} \{(-\pi, x_j + \pi h_j) \cup (x_j - \pi h_j + 2\pi, \pi)\} \times \prod_{j\in J_3} \{(x_j - \pi h_j, \pi) \cup (-\pi, x_j + \pi h_j - 2\pi)\} \right).$$

Пусть

$$\| f \|_{p(\cdot)} \le 1. \tag{8}$$

Тогда, полагая

$$\overline{p} = \max\{ p(x) \mid x \in T^n\},$$

имеем

$$\left(\int_{T^n} |(K_\lambda f)(x)|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{\overline{p}}} = \left(\int_{T^n} \left| \left(\int_{\Pi_x} + \int_{E_x} \right) f(t) k_\lambda (t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{\overline{p}}} \le I_1^{\frac{1}{\overline{p}}} + I_2^{\frac{1}{\overline{p}}}. \tag{9}$$

Здесь мы воспользовались тем, что отображение [4, с. 11] $(f,g) = \rho(f,g) = \left(\int_{T^n} | f(x) - g(x) |^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{\overline{p}}}$ является метрикой в $L_{2\pi}^{p(x)}$. Заметим, что в силу свойства C) имеем $|k_\lambda (t-x)| = O(1)$ при $x \in T^n$, $t \in E_x$. Поэтому с учетом (8) находим

$$\left| \int_{E_x} f(t) k_\lambda (t-x) dt \right| = O(1) \int_{E_x} | f(t) | dt = O(1) \int_{T^n} | f(t) | dt = = O(1) \| f \|_{p(\cdot)} = O(1), \tag{10}$$

так как при $q(x) \le p(x)$ имеет место оценка

$$\| f \|_{q(\cdot)} \le (2\pi + 1) \| f \|_{p(\cdot)}. \tag{11}$$

Из (9) и (10) следует, что

$$I_2 = O(1). \tag{12}$$

Пусть $\Delta_{k_i} = (x_{k_i}, x_{k_i + 1})$, $\Delta_{k_1,\ldots,k_n} = \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i}$. Оценим I_1. Имеем

$$I_1 = \sum_{k_1=0}^{2N_1 - 1} \cdots \sum_{k_n = 0}^{2N_n - 1} \int_{\Delta_{k_1,\ldots,k_n}} \left| \int_{\Pi_x} f(t) k_\lambda (t-x) dt \right|^{p(x)} dx = \sum_{k_1=0}^{2N_1 - 1} \cdots \sum_{k_n = 0}^{2N_n - 1} \int_{\Delta_{k_1,\ldots,k_n}} \left| \int_{\Pi_x} f(t) k_\lambda (t-x) dt \right|^{p(x) - s_{k_1,\ldots,k_n} + s_{k_1,\ldots,k_n}} dx. \tag{13}$$

Из того, что $\lambda \in K$, следует

$$m_1^j \lambda_1 \le \lambda_j \le M_1^j \lambda_1 (2 \le j \le n). \tag{14}$$

Из условия (3) и из (4) , (5) и (14) при $x \in \Delta_{k_1,\dots,k_n}$ получаем

$$|p(x)-s_k| = O((\ln(2\|\lambda\|^{\gamma}))^{-1}) = O\left(\frac{1}{\ln 2\sqrt{\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2}}\right) =$$

$$O\,\frac{1}{\ln 2\lambda_1\sqrt{1+(m_1^2)^2+\ldots+(m_1^n)^2}} = O\left(\frac{1}{\ln 2\lambda_1}\right)$$

Поэтому в силу $B)$, (8) и (14) имеем

$$\left|\int_{\Pi_x} f(t)k_\lambda(t-x)dt\right|^{p(x)-s_{k_1,\dots,k_n}} =$$

$$(\lambda_1^{\nu})^{O(\frac{1}{\ln(2\lambda_1)})}\left(\int_{\Pi_x}|f(t)|\,dt\right)^{O(\frac{1}{\ln(2\lambda_1)})} =$$

$$O(1)\left(\|f\|_{p(\cdot)}\right)^{O(\frac{1}{\ln(2\lambda_1)})} = O(1). \tag{15}$$

Положим

$$\mu = \mu(\lambda) = \int_{\Pi_x}|k_\lambda(t-x)|\,dt = \int_{[-\pi h_i,-\pi h_i]^n}|k_\lambda(t)|\,dt \tag{16}$$

и заметим, что в силу свойства $A)$ имеем $\mu(\lambda)=O(1)$. Мы можем считать, что для любого λ будет $\mu(\lambda)>0$. Из (13), (15) и (16) с помощью неравенства Йенсена находим

$$\mathrm{I}_1 = O(1)\sum_{k_1=0}^{2N_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{2N_n-1}\mu^{s_{k_1,\dots,k_n}}\int_{\Delta_{k_1,\dots,k_n}}\left(\frac{1}{\mu}\int_{\Pi_x}|f(t)|\cdot|k_\lambda(t-x)|\,dt\right)^{s_{k_1,\dots,k_n}}dx =$$

$$O(1)\sum_{k_1=0}^{2N_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{2N_n-1}\mu^{s_{k_1,\dots,k_n}}\int_{\Delta_{k_1,\dots,k_n}}\frac{dx}{\mu}\int_{\Pi_x}|f(t)|^{s_{k_1,\dots,k_n}}|k_\lambda(t-x)|\,dt =$$

$$O(1)\sum_{k_1=0}^{2N_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{2N_n-1}\mu^{s_{k_1,\dots,k_n}-1}\int_{[-\pi h_i,-\pi h_i]^n}|k_\lambda(t)|\,dt\int_{\Delta_{k_1,\dots,k_n}}|f(t+x)|^{s_{k_1,\dots,k_n}}dx =$$

$$O(1)\int_{[-\pi h_i,-\pi h_i]^n}|k_\lambda(t)|\,dt\sum_{k_1=0}^{2N_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{2N_n-1}\int_{\Delta_{k_1,\dots,k_n}}|f(t+x)|^{s_{k_1,\dots,k_n}}dx =$$

$$O(1)\int_{[-\pi h_i,-\pi h_i]^n}|k_\lambda(t)|\,dt\sum_{k_1=0}^{2N_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{2N_n-1}\int_{\Delta_{k_1,\dots,k_n,t}}|f(x)|^{s_{k_1,\dots,k_n}}dx,$$

где $\Delta_{k_1,\dots,k_n,t} = \prod_{i=1}^{n}(x_{k_i}-t_i, x_{k_i+1}-t_i)$.

Воспользовавшись равенствами (4) – (6), находим

$$\mathrm{I}_1 = O(1)\int_{[-\pi h_i,-\pi h_i]^n}|k_\lambda(t)|\,dt\sum_{k_1=0}^{2N_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{2N_n-1}\int_{\Delta_{k_1,\dots,k_n,t}}|f(x)|^{p_t(x)}dx =$$

$$= O(1)\int_{[-\pi h_i,-\pi h_i]^n}|k_\lambda(t)|\,dt\int_{\prod_{i=1}^{n}(\pi-t_i,\pi+t_i)}|f(x)|^{p_t(x)}dx=$$

$$= O(1) \int\limits_{[-\pi h_i, -\pi h_i]^n} |k_\lambda(t)|\,dt \int\limits_{T^n} |f(x)|^{p_t(x)}\,dx. \qquad (17)$$

Далее, в силу (7), (8) и (11)

$$\int\limits_{T^n} |f(x)|^{p_t(x)}\,dx = \int\limits_{T^n} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p_t}(\cdot)}\right|^{p_t(x)} \left(\|f\|_{p_t}(\cdot)\right)^{p_t(x)} dx \le$$

$$\le \int\limits_{T^n} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p_t}(\cdot)}\right|^{p_t(x)} \left((2\pi+1)\|f\|_{p(\cdot)}\right)^{p_t(x)} dx \le$$

$$(2\pi+1)^{\bar{p}} \int\limits_{T^n} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p_t}(\cdot)}\right|^{p_t(x)} dx = (2\pi+1)^{\bar{p}}. \qquad (18)$$

Из $A)$, (17) и (18) выводим

$$\mathrm{I}_1 = O(1). \qquad (19)$$

Сопоставляя оценки (9), (12), (19), установленные при условии (8), мы заключаем, что семейство линейных операторов $\{\mathrm{K}_\lambda\}_{\lambda\in K}$ равномерно ограничено на единичном шаре пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$. Теорема 1 доказана.

В качестве следствий теоремы 1 приведем примеры семейств операторов с некоторыми классическими ядрами, равномерно ограниченных в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$.

Операторы Фейера. Для каждого натурального m и $x \in R^1$ положим

$$\Phi_m(x) = \frac{2}{m+1}\left\{\frac{\sin\left[(m+1)\frac{x}{2}\right]}{2\sin\frac{x}{2}}\right\}^2$$

Пусть теперь $x = (x_1,...,x_n)$ и $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n)$. Многомерный аналог ядра Фейера имеет вид

$$K_\lambda(x) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{m_k}(x),$$

где $m_k \le \lambda_k < m_k + 1$. Нетрудно проверить, что семейство ядер $\{K_\lambda(x)\}_{\lambda\in K}$ удовлетворяет условиям $A) - C)$ и, следовательно, в силу теоремы 1 семейство операторов Фейера

$$F_\lambda f = (F_\lambda f)(x) = \frac{1}{\pi^n}\int_{T^n} f(t) K_\lambda(t-x)\,dt$$

равномерно ограничено в $L_{2\pi}^{p(x)}$ относительно $\lambda \in K$.

Операторы Стеклова. Для каждого $\lambda \in K$ положим

$$\Delta_\lambda = \prod_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{2\lambda_k}, \frac{1}{2\lambda_k}\right], \quad K_\lambda(x) = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k, x \in \Delta_\lambda, \\ 0, x \in T^n \setminus \Delta_\lambda, \end{cases}$$

и продолжим $K_\lambda(x)$ $2\pi-$периодически на R^n. Операторы Стеклова S_λ определяются равенством

$$S_\lambda f = (S_\lambda(f))(x) = \int_{T^n} f(t+x) K_\lambda(t)\,dt.$$

Не составляет труда проверить, что ядра Стеклова удовлетворяют условиям $A) - C)$ и поэтому из теоремы 1 следует, что семейство $\{S_\lambda(f)\}_{\lambda\in K}$ равномерно ограничено в $L_{2\pi}^{p(x)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарапудинов И.И.* О топологии пространства $L^{p(t)}[0,1]$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613-632.

2. *Шарапудинов И.И.* О равномерной ограниченности в пространстве $L^{p}(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 291–302.

3. *Samko S.G.* Denseness of $C_0^\infty(R^n)$ in generalized Sobolev Spaces $W^{m,p(x)}(R^n)$ // Intern. Soc. for Analysis, Applic. and Comput. 2000. Vol. 5. Direct and Inverse Problems of Math. Physics / ed. by *R.Gilbert*, *J. Kajiwara* and *Yongzhi S. Xu*. Kluwer Acad. Publ. P. 333–342.

4. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем / отв. ред. *А.Г. Кусраев*. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. 267 с. (Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 5).

Поступила в редакцию 10.09.2013 г.
Принята к печати 18.12.2013 г.