ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА II

М. М. Сиражудинов[1,3], Ш. Г. Алиев[1], Т. С. Хачлаев[2]

[1]Отдел математики и информатики ДНЦ РАН
[2]Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики
[3]Дагестанский государственный институт народного хозяйства

В работе изучены граничные задачи для одной эллиптической системы. К таким граничным задачам сводятся краевые задачи для системы Стокса для неоднородных и неизотропных жидкостей.

The boundary value problems for a single elliptic system are investigated. To such boundary value problems reduced are those for the Stokes system for non-homogeneous and non-isotropic fluids.

Ключевые слова: краевые задачи; фредгольмовый; нетеровый.

Keywords: boundary value problems; Fredholm property; Noeterian.

Классическая система уравнений Навье – Стокса в линейной теории гидродинамики получена в предположениях однородности и изотропности жидкости. На практике встречаются жидкости, не удовлетворяющие этим условиям. Таковы, например: жидкие кристаллы; жидкости, меняющиеся свои свойства в магнитном поле, и др. Такие среды существенно неизотропны и неоднородны. Поэтому представляет интерес изучение краевых задач для уравнений движений таких жидкостей. (Такие уравнения хорошо известны (см. [1–3].)

1. Краевые задачи для системы Навье – Стокса

1. Обобщением второго закона Ньютона для сплошных сред является соотношение:

$$\rho\frac{du}{dt} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div}\sigma' + F,$$

где $u = (u^1, u^2, u^3)$ – скорость частицы; ρ – плотность среды; p – давление; F– массовые силы;

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{3} u^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

– инерциональный член; σ′ – тензор вязких напряжений.

Тензор σ′ зависит от тензора скоростей

$$e(u) = \{e_{ij}\} = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right\}_{i,j=1}^{3},$$

температуры и других величин. Для малых $e(u)$ в механике сплошных сред предполагают, что в первом приближении σ' пропорционален тензору $e(u)$ (закон Стокса [2, с. 164]), точнее, что имеют место равенства

$$\sigma'_{ij}(u) = \sum_{k,h} a_{ijkh} e_{kh}(u) \qquad i,j = 1,2,3, \tag{1}$$

где a_{ijkh} – коэффициенты вязкости. Коэффициенты вязкости обладают свойством симметрии:

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk} = a_{khij}\,, \tag{2}$$

и положительной определенности:

$$\sum_{i,j,k,h} a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} \geq \alpha_0 \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^2\,, \qquad \forall \varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

где $\alpha_0 > 0$ – константа. Для неоднородной среды коэффициенты вязкости зависят также от x (тогда (2), (3) выполнены для каждого $x \in \overline{Q}$). Для однородных и изотропных сред коэффициенты вязкости даются равенством: $a_{ijkh} = \eta_1\delta_{ij}\delta_{kh} + \eta_2(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk})$, где δ_{ij} – символ Кронекера. На практике встречаются жидкие среды, не удовлетворяющие гипотезе изотропности. Это, например, некоторые магнитовосприимчивые жидкости; жидкие кристаллы и др. Такие среды существенно неизотропны и неоднородны. Поэтому представляет интерес изучение уравнений движений таких жидкостей. Такие уравнения хорошо известны [1–2]. Мы в основном будем рассматривать стационарные плоско-параллельные течения ($u^3 = 0$), поэтому выпишем уравнения для данного случая в линеаризованном виде. Кроме того, считаем, что коэффициенты вязкости не зависят от x_3. Согласно (1) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma'_{11}(u)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\sigma'_{12}(u)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = F_1\,, \\ \dfrac{\partial\sigma'_{21}(u)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\sigma'_{22}(u)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = F_2\,, \\ \operatorname{div}(\rho u) \equiv \dfrac{\partial(\rho\, u^1)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(\rho\, u^2)}{\partial x_2} = F_3\,, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= b_{11}\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}b_{12}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right) + b_{13}\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\,, \\ 2\sigma'_{12} = 2\sigma'_{21} &= b_{12}\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}b_{22}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right) + b_{23}\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\,, \\ \sigma'_{22} &= b_{13}\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}b_{23}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right) + b_{33}\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

причем $b_{11} = a_{1111}$, $b_{12} = a_{1112}$, $b_{13} = a_{1122}$, $b_{22} = a_{1212}$, $b_{23} = a_{1222}$, $b_{33} = a_{2222}$. При получении (4), (5) мы воспользовались также симметрией коэффициентов вязкости (2). Отметим одно полезное следствие (3). Положим в (3) $\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3i} = 0$, $\varepsilon_{11} = \xi_1$, $2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \xi_2$, $\varepsilon_{22} = \xi_3$, тогда получим:

$$\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0 |\,\xi\,|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall x \in Q\,. \tag{6}$$

Иначе говоря, матрица $\mathbf{b} = \{b_{ij}\}$ – положительно определенная.

Предполагаем, что коэффициенты системы (4) *удовлетворяют одному из условий*:

(i) $\rho, b_{ij} \in C_\alpha^{r+1}(\bar{Q})$, где $0 < \alpha < 1$, $r \geq 0$ – неотрицательное целое число, граница области ∂Q принадлежит классу C_α^{r+2}; $\rho \geq \rho_0$, где ρ_0 – положительное число;

(ii) коэффициенты ρ, b_{ij} принадлежат $W_q^{r+2}(Q)$, $\rho \geq \rho_0$, где $q > 2$ (r, ρ и Q такие же, как в (i)).

2. Задача с условиями прилипания на границе

Рассмотрим для системы (4) задачу с краевыми условиями:

$$u^1 = \varphi_1, \quad u^2 = \varphi_2 \quad \text{на} \quad \partial Q. \tag{7}$$

Условия (7) называются условиями прилипания, что соответствует предположению неподвижности частиц жидкости вблизи твердых границ. Пусть φ_j, $j = 1,2$, принадлежат $Y(r,-2;\partial Q)$; $F_3 \in X(r,1;Q)$, $F_j \in X(r,0;Q)$, $j = 1,2$. И пусть искомые $u^j \in X(r,2;Q)$, $j = 1,2$, $p \in X(r,1;Q)$, где $X(r,i;Q) = C_\alpha^{r+i}(\bar{Q})$, $i = 0,1,2$; $Y(r,-2;\partial Q) = C_\alpha^{r+2}(\partial Q)$ при выполнении условий (i) и $X(r,i;Q) = W_q^{r+2}(Q)$, $i = 0,1,2$; $Y(r,-2;\partial Q) = W_q^{r+2-1/q}(\partial Q)$ в условиях (ii). Тогда справедлива

Теорема 1. Задача (4), (7) тогда и только тогда разрешима, когда выполнено условие:

$$\int_Q F_3\,dx - \int_{\partial Q} \rho(\varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2)ds = 0, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ – внешняя нормаль к границе ∂Q. Причем решения однородной задачи представляются в виде $u^1 = u^2 = 0$, $p = c$, где c – любое действительное число.

Доказательство. Заметим сначала, что задача (4), (7) фредгольмова. Действительно, положим $a_0 = b_{11} - b_{13} - 4^{-1}b_{22}$, $h = 4^{-1}b_{22}$, $b_0 = 2^{-1}b_{12}$, $c_0 = 2^{-1}b_{23} - b_{12}$, $e_0 = 2^{-1}b_{23}$, $c_0 = 2^{-1}b_{23} - b_{12}$, $d_0 = 2^{-1}b_{12} - b_{23}$, $f_0 = b_{33} - b_{13} - 4^{-1}b_{22}$, тогда с учетом третьего уравнения (4) имеем:

$$\begin{cases} a_0(x)\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x_1^2} + h(x)\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x_2^2} + b_0(x)\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x_1^2} + c_0(x)\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = F_1, \\ d_0(x)\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x_1^2} + e_0(x)\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x_2^2} + h(x)\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x_1^2} + f_0(x)\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = F_2, \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x_2} = F_3. \end{cases} \tag{9}$$

В соотношениях (9) опущены младшие члены, коэффициенты которых в силу (i), (ii) таковы, что эти слагаемые образуют вполне непрерывный оператор. (Как известно, вполне непрерывная добавка не влияет на фредгольмовость.) Согласно положительной определенности матрицы $\mathbf{b}$, (6), $b_{22} \geq \alpha_0$, поэтому без ограничения общности можно считать, что в (9) $h = 1$. Тогда система (9) переходит в (1) из [4] с $a = a_0, \dots, f_0 = f$, причем выполнены условия (2) из [4] (первое ввиду (6)). Следовательно, в силу теоремы 1 из [4] задача (4), (7) фредгольмова.

Рассмотрим теперь однородную задачу ($F_1 = F_2 = F_3 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). Пусть u^1, u^2, p – ее решение. Умножим первое уравнение (4) на u^1, второе на u^2, сложим и проинтегрируем по частям. Тогда, с учетом положительной определенности (6), получим:

$$\int_Q ((e_{11}(u))^2 + 2\,(e_{12}(u))^2 + (e_{22}(u))^2)dx = 0.$$

Следовательно,

$$\partial_{x_1} u^1 = 0, \quad \partial_{x_2} u^2 = 0, \quad \partial_{x_2} u^1 + \partial_{x_1} u^2 = 0.$$

Из этих равенств следует, что $u^1 = ax_2 + b$, $u^2 = -ax_1 + c$, где a, b, c – действительные числа. Отсюда, с учетом однородности краевых условий, имеем: $a = b = c = 0$. Значит, $u^1 = u^2 = 0$. Подставив их в уравнения, получим: p – произвольное действительное число. Таким образом, ядро оператора A краевой задачи (4), (7) одномерное. Отсюда, ввиду фредгольмовости A, $\dim \operatorname{Ker} A^* = 1$. Пусть u^1, u^2, p – решение неоднородной задачи. Тогда, интегрировав третье тождество из (4), получим, что условие (8) необходимо для разрешимости неоднородной задачи. Для доказательства достаточности заметим, что левая часть (8) определяет нетривиальный непрерывный функционал U^* над пространством $(X(r,0;\,Q))^2 \times X(r,1;\,Q) \times (Y(r,-2;\,\partial Q))^2$ правых частей (4), (7). С учетом этого получим, что (8) эквивалентно включению $U^* \in \operatorname{Ker} A^*$. Значит, для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения условия $\langle U^*, AU \rangle = 0$, последнее совпадает с условием (8). Теорема доказана.

3. Краевая задача со свободной границей

Рассмотрим для системы (4) краевую задачу со следующими краевыми условиями:

$$\begin{cases} \beta \cdot (\sigma'_{11}(u) - p) + \delta \cdot \sigma'_{11}(u) = \psi_1 \in Y(r,-1;\partial Q), \\ \beta \cdot \sigma'_{21}(u) + \delta \cdot (\sigma'_{22}(u) - p) = \psi_2 \in Y(r,-1;\partial Q), \end{cases} \tag{10}$$

где $\beta,\delta \in C_\alpha^{r+1}(\partial Q)$, когда задача рассматривается над пространствами Гельдера и $\beta,\delta \in C_\gamma^{r}(\partial Q)$, ($\gamma = \frac{q-1}{q} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$) в случае пространств Соболева. Искомые и правые части системы (4) из тех же пространств, что и в задаче (4), (7). Пространство $Y(r,-1;\,\partial Q)$ определяется аналогично $Y(r,-2;\,\partial Q)$. Справедлива

Теорема 2. Для нетеровости задачи (4), (10) необходимо и достаточно выполнения условия: $(\beta(x),\delta(x)) \neq 0$ всюду на ∂Q. При выполнении этого условия индекс задачи дается равенством: $J = 4(\operatorname{ind}(\beta - i\delta) - m + 1)$.

Доказательство. Аналогично теореме 1 получим, что задача (4), (10) эквивалентна (в смысле нетеровости и равенства индексов) задаче (1), (15) из [4]. (При преобразовании краевых условий (10) в (15) нужно воспользоваться третьим уравнением (4).) Поэтому теорема 2 есть следствие теоремы 2 из [4].

Следствие 1 (Задача со свободной границей). Пусть $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (\beta,\delta)$ – векторное поле единичных нормалей к границе ∂Q, тогда задача (4), (10) фредгольмова. Решения однородной задачи даются равенствами: $u^1 = ax_2 + b$, $u^2 = -ax_1 + c$, $p = 0$ где a, b, c – произвольные действительные числа. Неоднородная задача тогда и только тогда разрешима, когда выполнены условия:

$$\int_Q F_j\,dx - \int_{\partial Q} \varphi_j\,ds = 0, \qquad j = 1,2,$$
$$\int_Q (x_2F_1 - x_1F_2)\,dx - \int_{\partial Q} (x_2\varphi_1 - x_1\varphi_2)\,ds = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть u^1, u^2, p – решение однородной задачи. Тогда аналогично предыдущей теореме получим: $u^1 = ax_2 + b$, $u^2 = -ax_1 + c$, $p = 0$, где a, b, c – произвольные действительные числа.

Умножим первое уравнение (4) на $v^1 \in X(r,2;\,Q)$, второе на $v^2 \in X(r,2;\,Q)$, сложим и интегрируем по частям, тогда получим:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_Q b_{ij}\, e_{ji}(u) e_{ji}(v) dx + \int_Q p \operatorname{div} v\, dx =$$

$$= \int\limits_{\partial Q} \{(\sigma'_{11}(u)\, n_1 + \sigma'_{12}(u)\, n_2 - p\, n_1)v_1 +$$
$$+(\sigma'_{21}(u)\, n_1 + \sigma'_{22}(u)\, n_2 - p\, n_2)v_2\}ds - \int_Q (F_1 v^1 + F_2\, v^2)\, dx\,. \tag{12}$$

Покажем необходимость условий (11). Пусть u^1, u^2, p – решение неоднородной задачи. Положим в (12) последовательно $v = (1,0)$, $v = (0,1)$, $v = (x_2, -x_1)$. В результате, с учетом краевых условий, получим (11). Достаточность условий (11) устанавливается аналогично теореме 1. Следствие доказано.

4. Жидкость в упругой оболочке

Пусть на границе ∂Q имеем:

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\sigma}(u)\boldsymbol{a} = \varphi_1 \in Y(r,-1;\,\partial Q)\,,\quad u\cdot\boldsymbol{d}^\perp = \varphi_2 \in Y(r,-2;\,\partial Q)\,,$$
(13)

где $\boldsymbol{\sigma}(u) = \{\sigma'_{ij}(u) - p\delta^i_j\}$, δ^i_j – символ Кронекера; $\boldsymbol{a} = (\xi,\eta)$, $\boldsymbol{d} = (\beta,\ \delta)$ – достаточно гладкие векторные поля, определенные на ∂Q; $\boldsymbol{d}^\perp = (\delta, -\beta)$ – ортогональное $\boldsymbol{d}$ поле. Имеет место

Теорема 3. Краевая задача (4), (13) нетерова только в том случае, когда выполнены условия: $\boldsymbol{d}(\mathrm{x}) \neq 0$, $\boldsymbol{a}(\mathrm{x}) \neq 0$ всюду на ∂Q. При выполнении их индекс задачи дается равенством $\mathrm{J} = 4(\mathrm{ind}\,(\xi - \mathrm{i}\eta) - \mathrm{m} + 1$.

Это есть следствие теоремы 5 из [4]. Доказательство такое же, как предыдущих теорем.

Пусть на границе области ∂Q имеем:

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\sigma}(u)\mathbf{n} + \mathrm{k}\boldsymbol{d}\cdot u = \varphi_1\,,\quad u\cdot\boldsymbol{d}^\perp = \varphi_2\,, \tag{14}$$

где $k > 0$ – достаточно гладкая (например, из класса $C^{r+1}_\alpha(\partial Q)$) функция. Тогда имеет место

Теорема 4. Пусть поле $\boldsymbol{d}(x) \neq 0$ всюду на ∂Q и пусть оно не является полем касательных, тогда задача (4), (14) однозначно разрешима в $\left(X(r,2;Q)\right)^2 \times X(r,1;Q)$ для любых правых частей $F_1, F_2 \in X(r,0;Q)$, $F_3 \in X(r,1;Q)$, $\varphi_1 \in Y(r,-1;\partial Q)$, $\varphi_2 \in Y(r,-2;\partial Q)$.

В случае, когда $\boldsymbol{d}(x)$, $x \in \partial Q$ – поле касательных, то $u = 0$, $p = c \in \mathbb{R}$ – решение однородной задачи, а неоднородная задача разрешима в том и только в том случае, когда имеем:

$$\int\limits_Q F_3\, dx \pm \int\limits_{\partial Q} \varphi_2 |\,\boldsymbol{d}\,|^{-1}\, ds = 0. \tag{13}$$

(Знак «+», если $\boldsymbol{d}^\perp$ и $\boldsymbol{n}$ одинаково направлены; «–» - в противоположном случае.)

Доказательство. Согласно предыдущей теореме задача (4), (14) фредгольмова, так как она отличается от задачи (4), (13) наличием младшего члена (который не влияет на фредгольмовость) в граничном условии. Выражение под граничным интегралом справа в (12) можно представить в виде:

$$(\sigma'_{11}(u)\, n_1 + \sigma'_{12}(u)\, n_2 - p\, n_1)v_1 + (\sigma'_{21}(u)\, n_1 + \sigma'_{22}(u)\, n_2 - pn_2)v_2 =$$
$$= |\,\boldsymbol{d}\,|^{-2}\big((\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\sigma}(u)\boldsymbol{n})(v\cdot\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{d}^\perp\cdot\boldsymbol{\sigma}(u)\boldsymbol{n})(v\cdot\boldsymbol{d}^\perp)\big)\,.$$

Пусть $u = (u^1, u^2)$, p – решение однородной задачи и $v = u$, тогда, с учетом предыдущего равенства, краевых условий и положительной определенности (6) из (12), получим:

$$\sum_{i,j=1,2}^{2} \int_Q \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_{\partial Q} |d|^{-2} k\,(u\cdot d)^2 ds \le 0. \tag{16}$$

Так как $k > 0$, отсюда согласно второму граничному условию имеем: $u(x) = 0$ на ∂Q. Тогда из (16), аналогично теореме 1, получим: $u(x) = 0$ всюду в $\overline{Q}$. Отсюда и из уравнений получим $p = c \in \mathbb{R}$. Рассмотрим теперь два случая: 1) $\boldsymbol{d}$ совпадает с полем касательных на ∂Q; 2) нет такого совпадения.

В первом случае коэффициент при p в граничном условии есть нуль, а во втором нет. Поэтому в первом случае однородная задача имеет одномерное ядро: $u = 0$, $p = c \in \mathbb{R}$, а во втором ядро тривиальное. Значит, в силу фредгольмовости задачи во втором случае задача однозначно разрешима для любых правых частей. А для разрешимости задачи в первом случае необходимо и достаточно выполнения условия (15) (достаточность доказывается аналогично теореме 1. Оно следует интегрированием третьего равенства (4) с учетом равенств: $|\boldsymbol{d}|^2 u\cdot\boldsymbol{n} = (u\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}) + (u\cdot\boldsymbol{d}^{\perp})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}^{\perp})$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d} = 0$. Теорема доказана.

5. Смешанная краевая задача

Пусть L_1, L_2 – непересекающиеся части границы, каждая из которых состоит из не-которого числа m_j, $j = 1,2$, связных компонент $\Gamma_0,\dots,\Gamma_m$ границы, причем $L_1 \cup L_2 = \partial Q$ (для определенности считаем, что $\Gamma_0 \subset L_1$). Рассмотрим для системы (4) задачу с краевыми условиями:

$$u^j = \varphi_j \in Y(r,-2;L_1),$$
$$\sigma_{i1}(u)n_1 + \sigma_{i2}(u)n_2 = \psi_i \in Y(r,-1;L_2),\quad i,j = 1,2, \tag{17}$$

где (n_1,n_2) – нормаль к границе, $\sigma_{ij}(u) = \sigma'_{ij}(u) - p\,\delta^i_j$. Справедлива

Теорема 5. Задача (4), (17) однозначно разрешима для любых правых частей.

Доказательство. Аналогично теоремам 1 и 2 из [4] получим, что задача (4), (17) эквивалентна (в смысле нетеровости и равенства индексов) задаче для системы (1) из [4] с краевыми условиями (17), где теперь σ_{ij} определяются по формулам (16). Как и ранее в [4], для определителя $\tau(x)$ имеем:

$$\det\tau = -\frac{4}{s^4((4+s)^2 + (b+d)^2)} \times$$
$$\left(\dot x_2^2 + 2\frac{b+d+i(s+a+f+2)}{4+s+i(b+d)}\dot x_2\dot x_1 - \dot x_1^2\right)\times$$
$$\left(\dot x_2^2 + 2\frac{(b+d)(s+2)+i(s^2+2s-(b+d)^2)}{2(4+s-i(b+d)}\dot x_2\dot x_1 - \dot x_1^2\right)$$

для x, принадлежащего L_1, а на L_2 имеем:

$$\det\tau = -4^{-1}(\dot x_2 + i\dot x_1)\left(n_1^2 - \left(b - e + i\frac{s}{2}\right)n_1n_2 - n_2^2\right)^2.$$

Теперь, повторив рассуждения теорем 1, 2 и следствия 1 из [4], получим фредгольмовость рассматриваемой задачи. Далее, аналогично предыдущей теореме получим, что однородная задача имеет только тривиальное решение. Следовательно, задача (4), (17) однозначно разрешима для любых правых частей. Теорема доказана.

Замечание. Кроме рассмотренной смешанной задачи можно рассмотреть и другие. Например, на одной части границы рассматриваем условия прилипания, на другой – граничные условия из предыдущего пункта (такая задача также однозначно разрешима). Можно рассмотреть комбинации более двух краевых условий. Все такие задачи можно изучить по тому же плану, что и в теореме 5. Заметим, что утверждение теоремы 1 справедливо и для «трехмерных течений», т.е. предположение плоско-параллельности те-чений не существенно. Доказательство этого можно получить аналогично [3] с привлечением неравенства Корна. При этом условия на коэффициенты вязкости можно ослабить: достаточно их считать ограниченными и измеримыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кац Е.И., Лебедев В.И.* Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988. 144 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: в 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1976. 536 с.
3. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961. 204 с.
4. *Сиражудинов М.М., Алиев Ш.Г.* Краевые задачи для системы Стокса // Вестн. Дагест. науч. центра. 2011. № 42. С. 15-24.

Поступила в редакцию 21.03.2012 г.
Принята к печати 26.06.2013 г.