УДК 517.926

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННО-ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ГИПОТЕЗЫ ПОДОБИЯ

А. Х. Катхим[1], А. Р. Эфендиев[2]

[1]Киркукский университет, Ирак
[2]Дагестанский государственный университет

В настоящей статье мы излагаем определения и некоторые свойства обобщенно-однородных функций. Далее на основе этих свойств мы доказываем, что гипотеза подобия [1] соответствует экспериментально установленному виду намагниченности, что последняя, как и потенциал Гиббса, является обобщенно-однородной функцией. В общем случае получены формулы для критических показателей.

This paper presents the definition and some properties of generalized homogeneous function. Then on the basis of these properties we prove that the similarity hypothesis [1] corresponds to the experimentally established form of magnetization and that the latter, as well as the Gibbs potential, is a generalized homogeneous function. Formulas for critical exponents are obtained in the general case.

Ключевые слова: матрица; обобщенно-однородная функция; потенциал; дифференцирование; производная; гипотеза подобия; критические показатели.

Keywords**:** matrix; generalized homogeneous function; similarity hypothesis; critical indicators.

§ 1

Пусть $f(x)$ вещественная и непрерывная вектор-функция, определенная в n-мерном пространстве R^n. Пусть $A(x,c)=\left\|a_{ij}(x_1,\ldots,x_n,c)\right\|,\ i,j=\overline{1,n}$ заданная матрица порядка n. Пусть далее k,l – заданные целые неотрицательные числа и $p=\dfrac{k}{2l+1}$.

Будем предполагать, что матрица $A(x,c)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $A(x,1)=E$ – n-мерная единичная матрица;

2) $a_{ij}(x,c),\ i,j=\overline{1,n}$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы по x в шаре $\|x\|<r$ и по параметру $c\in(-1-b,1+b)$, $b>0$;

3) матрица $A(x,c)$ определяет систему дифференциальных уравнений

$$c\frac{dz}{dc}=\varphi(z), \tag{1.1}$$

где $\dfrac{dz}{dc}=colon\left(\overset{\circ}{z}_1,\ldots,\overset{\circ}{z}_n\right)$, $\varphi(z)=colon(\varphi_1(z),\ldots,\varphi_n(z))$, $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z=A(x,c)x$, а вектор-функция $\varphi(z)$ явно не зависит от параметра c.

Определение 1.1 [2]. Вещественную вектор-функцию $f(x)$, определенную и непрерывную в области $D\subset R^n$, будем называть обобщенно-однородной порядка p класса матрицы $A(x,c)$, где $c\in(-1-b,1+b)$, $b>0$, если выполнено соотношение

$$f(z)=c^p J(z,x)f(x), \tag{1.2}$$

где $z=A(x,c)x$, $J(z,x)=\left\|\dfrac{\partial z_i}{\partial x_j}\right\|$ – матрица Якоби.

Компоненты $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots, f_n(x_1,\ldots,x_n)$ вектора-функции $f(x)$, удовлетворяющие соотношению (1.2), мы называем в совокупности обобщенно-однородными порядка p класса матрицы $A(x,c)$. В [3] и [4] даны подобные определения, однако в них элементы матрицы $A(x,c)$ предполагаются голоморфными и $c\in(-\infty,+\infty)$.

Вообще говоря, если отбросить условие голоморфности, то параметр «c» будет меняться на конечном интервале.

Теорема 1.1. Для того чтобы вектор-функция $f(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в D, была обобщенно-однородной порядка p класса заданной матрицы $A(x,c)$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе уравнений в частных производных

$$J(f,x)\varphi(x)=[pE+J(\varphi,x)]f(x), \tag{1.3}$$

где E – единичная матрица.

Следствие 1.1. Вектор-функция $\varphi(x)$, определенная и непрерывно-дифференцируемая в D, является обобщенно-однородной нулевого порядка класса матрицы $A(x,c)$.

Доказательство теоремы.

1. **Необходимость.** Пусть вектор-функция $f(x)$ – обобщенно-однородная порядка p класса матрицы $A(x,c)$. Тогда справедливо равенство (1.2). Дифференцируя его по параметру «c», имеем:

$$\left\|\frac{\partial f_i(z)}{\partial z_j}\right\|\frac{dz}{dc}=pc^{p-1}\left\|\frac{\partial z_i}{\partial \dot{x}_j}\right\|f(x)+c^p\left\|\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_j\partial c}\right\|f(x) \tag{1.4}$$

Учитывая равенство (1.1), имеем

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_j\partial c}=c^{-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j},$$

тогда равенство (1.4) перепишется в виде

$$J(f(z),z)\frac{dz}{dc}=pc^{p-1}J(z,x)f(x)+c^{p-1}J(\varphi(z),x)f(x). \tag{1.5}$$

Умножив обе части равенства (1.5) на «c» и воспользовавшись соотношениями (1.1) и (1.2), получим

$$J(f(z),z)\varphi(z)=pf(x)+c^pJ(\varphi(z),x)f(x). \tag{1.6}$$

Положив в (1.6) $c=1$, с учетом $A(x,1)=E$ и $z_i|_{c=1}=x_i,\ i=\overline{1,n}$, получим требуемое (1.3).

2. **Достаточность.** Пусть имеет место (1.3). Покажем, что вектор-функция $f(x)$ является обобщенно-однородной порядка p класса матрицы $A(x,c)$, т.е. выполняется соотношение (1.2). Для этого равенство (1.3) перепишем в виде

$$J(f(z)z)\varphi(z)-pf(z)-J(\varphi(z),z)f(z)=0. \tag{1.7}$$

Зафиксировав вектор x, введем в рассмотрение новую неизвестную вектор-функцию $\psi(x,c)=col(\psi_1(x,c),\ldots,\psi_n(x,c))$ по формуле

$$\psi(x,c)=f(z)-c^pJ(z,x)f(x). \tag{1.8}$$

Дифференцируя равенство (1.8) по параметру «c», затем, умножив обе части на «c», получим систему дифференциальных уравнений для вектор-функции $\psi(x,c)$

$$c\frac{d\psi}{dc}=J\big(f(z),z\big)\varphi(z)-pc^{p}J(z,x)f(x)-c^{p}J\big(\varphi(z),z\big)J(z,x)f(x)\cdot$$

Учитывая равенства (1.7) и (1.8), последнее равенство перепишется в виде (1.9)

$$c\frac{d\psi}{dc}=p\psi(x,c)+J\big(p(z),z\big)\psi(x,c)\cdot \tag{1.9}$$

Выберем начальные условия для системы (1.9)

$$\psi(x,1)=0\,. \tag{1.10}$$

В силу теоремы единственности линейная задача Коши (1.9), (1.10) имеет единственное решение $\psi(x,c)\equiv 0$.

С другой стороны, решением задачи Коши (1.9), (1.10) является вектор-функция, определенная формулой (1.8). В самом деле, $\psi(x,c)$ из (1.8) удовлетворяет уравнению (1.9) и при $c=1$ имеем: $\psi(x,1)=f(x)-Ef(x)=0$, т.е. из (1.8) имеем (1.2). Теорема доказана.

Теорема 1.2. [2] Для класса матрицы $A(x,c)$ из теоремы 1.1 имеет место равенство

$$A\big(A(x,c_2)x,c_1\big)A(x,c_2)x=A(x,c_1c_2)x\,. \tag{1.11}$$

Доказательство теоремы следует из того, что φ(*x*) есть обобщенно-однородная вектор-функция класса *A*(*x*, *c*) порядка нуль.

Следствие 1.2. Семейство $\{A(c)\}$ образует однопараметрическую группу преобразований пространства R^n.

Пример. Скалярная функция

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum a_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\left(p_1+q_1x_1^{\alpha_1}\right)^{-\frac{i_1}{\alpha_1}} \quad x_n^{i_n}\left(p_n+q_nx_n^{\alpha_n}\right)^{-\frac{i_n}{\alpha_n}}, \qquad \ldots$$

где $\alpha_s,\,p_s\,\left(s=\overline{1,n}\right)$ известные натуральные числа и $p_s>q_s>0$, а знак Σ должен быть распространен на все решения в целых и положительных $p_1i_1+p_2i_2+\ldots+p_ni_n=p$, $p\neq p_s$, является обобщенно-... а матрицы $\left\|\delta_{ij}c^{p_i}\left[1+\frac{q_i}{p_i}\left(1-c^{\alpha_ip_i}\right)x_i^{\alpha_i}\right]^{-\frac{1}{\alpha_i}}\right\|$, где $i,j=1$, порядка p,δ_{ij} – символ Кронекера.

§ 2.

В работе [1], исходя из равенства

$$G\left(\lambda^{a_\varepsilon}\cdot\varepsilon,\lambda^{a_H}\cdot H\right)=\lambda^{p}G(\varepsilon,H), \tag{2.1}$$

являющегося гипотезой подобия, устанавливается, что потенциал Гиббса является обобщенно-однородной функцией. Конечно (2.1), является частным случаем (1.2). Мы здесь докажем, что гипотеза подобия (2.1) имеет именно такой вид, когда экспериментально установлено, что намагниченность $M(\varepsilon,H)$ удовлетворяет условиям: $M(\varepsilon,0)\sim(-\varepsilon)^{\beta}$, $M(0,H)\sim H^{\frac{1}{\delta}}$, где β,δ – критические показатели, выражающиеся через показатели подобия a_ε и a_H.

Введем обозначения $\tilde H=\begin{pmatrix}\varepsilon\\ H\end{pmatrix}$, $A(\lambda,\tilde H)=\begin{pmatrix}a_{11}(\varepsilon,H,\lambda) & a_{12}(\varepsilon,H,\lambda)\\ a_{21}(\varepsilon,H,\lambda) & a_{22}(\varepsilon,H,\lambda)\end{pmatrix}$

Исходя из (1.2) равенство (2.1) запишем в виде

$$G\left(A\left(\lambda,\widetilde{H}\right)\widetilde{H}\right)=\lambda^{p}G\left(\widetilde{H}\right),$$

(2.2)

где λ – параметр, причем (1.1) в данном случае имеет вид

$$\lambda\frac{dz}{d\lambda}=\varphi(z), z=A\left(\lambda,\widetilde{H}\right)\widetilde{H}, \varphi(z_1,z_2)=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},$$

$A\left(1,\widetilde{H}\right)=E$ – единичная матрица.

Если считать G дифференцируемой, то обобщенная формула Эйлера (1.3) в данном случае имеет вид

$$\varphi_1(\varepsilon,H)\frac{\partial G}{\partial\varepsilon}+\varphi_2(\varepsilon,H)\frac{\partial G}{\partial H}=pG(\varepsilon,H).$$

Если $a_{ij}(\lambda,\varepsilon,H)=a_{ij}(\lambda)$, то

$$\varphi_1(\varepsilon,H)=a_{11}'(1)\varepsilon+a_{12}'(1)H, \varphi_2(\varepsilon,H)=a_{21}'(1)\varepsilon+a_{22}'(1)H.$$

Нетрудно заметить, что случай, рассмотренный в [1], имеет место, если

$a_{12}=0$, $a_{21}=0$, $a_{12}'=a_{21}'=0$.

Переписав (2.2) в виде

$\lambda^{p}G(\varepsilon,H)=G\left(a_{11}(\lambda)\varepsilon+a_{12}(\lambda)H, a_{21}(\lambda)\varepsilon+a_{22}(\lambda)H\right)$,

где $z_1=a_{12}(\lambda)\varepsilon+a_{12}(\lambda)H$, $z_2=a_{21}(\lambda)\varepsilon+a_{22}(\lambda)H$,

получим

$$\lambda^{p}\frac{\partial G}{\partial H}=\frac{\partial G(z_1,z_2)}{\partial z_1}a_{12}(\lambda)+\frac{\partial G(z_1,z_2)}{\partial z_2}a_{22}(\lambda)$$

или

$$\lambda^{p}M(\varepsilon,H)=-s(z_1,z_2)a_{12}(\lambda)+M(z_1,z_2)a_{22}(\lambda).$$

Пусть $H=0$ и $\varepsilon\to 0$. С этим случаем связан показатель β. Здесь

S – энтропия. Полагая $a_{11}(\lambda)\varepsilon=-1$, $a_{21}(\lambda)=0$ и считая, что корни уравнения $a_{11}(\lambda)=-\varepsilon^{-1}$ являются корнями уравнениями $a_{21}(\lambda)=0$ и учитывая, что $s(-1{,}0)=0$, из равенства

$$\lambda^{p}M(\varepsilon,0)=-s\left(a_{11}(\lambda)\varepsilon,a_{21}(\lambda)\varepsilon\right)a_{12}(\lambda)+M\left(a_{11}(\lambda)\varepsilon,a_{21}(\lambda)\varepsilon\right)a_{22}(\lambda)$$

получим $M(\varepsilon,0)=\left[a_{11}^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{-p}a_{22}\left[a_{11}^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]M(-1{,}0)$.

Так как экспериментально установлено [1], что $M(\varepsilon,0)\sim(-\varepsilon)^{\beta}$ при $\varepsilon\to 0$, то

$$(-\varepsilon)^{-\beta}=\left[a_{11}^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{-p}a_{22}\left[a_{11}^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right],$$

$$\beta=\frac{\ln\left|\left[a_{11}^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{-p}a_{22}\left[a_{11}^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\right|}{\ln|-\varepsilon|}=\psi(p).$$

Потребуем, чтобы было $a_{22}(\lambda)=\lambda^{p}\left[a_{11}(\lambda)\right]^{-\psi(p)}$. Тогда $\beta=\psi(p)$ функция подобия. Если, в частности, $a_{22}(\lambda)=\lambda^{a_H}$, то [1] $\lambda^{a_H}=\lambda^{p}\left[\lambda^{a_\varepsilon}\right]^{-\psi(p)}$, $\beta=\psi(p)=\frac{p-a_H}{a_\varepsilon}$.

Пусть теперь $\varepsilon\to 0$ и $H\to 0$. С этим случаем связан показатель δ. Имеем

$$M(0,H)=\lambda^{-p}\left[-s(a_{12}H,a_{22}H)a_{12}(\lambda)+M(a_{12}H,a_{22}H)a_{22}(\lambda)\right].$$

Пусть $a_{12}(\lambda)H = 0$, $a_{22}(\lambda)H = 1$, $\lambda = a_{22}^{-1}(H^{-1})$, $a_{12}\left[a_{22}^{-1}(H^{-1})\right] = 0$. Тогда $M(0,H) = H^{-1}M(0,1)\left[a_{22}^{-1}(H^{-1})\right]^{-p}$. Так как $M(0,H) \sim H^{\frac{1}{\delta}}$ (экспериментально), то $H^{\frac{1}{\delta}} = H^{-1}\left[a_{22}^{-1}(H^{-1})\right]^{-p}$ и $\delta = \dfrac{\ln H}{\ln\left|\left[a_{22}^{\ 1}(H^{\ 1})\right]^{\ p} H^{\ 1}\right|} = \omega(p)$.

Как показано в [5], если принять $M(0,H) \sim H^{\frac{1}{\delta}}$, $M(\varepsilon,0) \sim (\ \ \varepsilon)^{\beta}$, то матрица A имеет вид

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{a_\varepsilon} & 0 \\ 0 & \lambda^{a_H} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{p - a_H}{a_\varepsilon}, \quad \delta = \frac{a_H}{p - a_H},$$

т.е. вид гипотезы подобия (1) соответствует тем экспериментальным данным, которые указаны выше.

Очевидно $A(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = A(\lambda_1) \cdot A(\lambda_2)$ и $A(\lambda_1) = E$, т.е. имеют место теорема 1.2 и следствие 1.2.

Отсюда следует, что, если будут получены более точные экспериментальные данные, то соотношение (2.1) заменится соотношением (2.2) и вообще (1.2) при $n = 2$. Для критических показателей β и δ выведем формулы при выполнении (2.2), т.е. в более общем виде, чем то, что мы показали выше.

Перепишем (2.2) в виде

$$G(z_1, z_2) = \lambda^p G(\varepsilon, H), \tag{2.3}$$

где $z_1 = a_{11}(\varepsilon, H, \lambda)\varepsilon + a_{12}(\varepsilon, H, \lambda)H$,

$z_2 = a_{21}(\varepsilon, H, \lambda)\varepsilon + a_{22}(\varepsilon, H, \lambda)H$.

Дифференцируя (2.3) по H, получим $\lambda^p \dfrac{\partial G}{\partial H} = \dfrac{\partial G}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial H} + \dfrac{\partial G}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial H}$,

$$\lambda^p M(\varepsilon, H) = -s(z_1, z_2)\frac{\partial z_1}{\partial H} + M(z_1, z_2)\frac{\partial z_2}{\partial H}.$$

Так как производные обобщенно-однородной функции $\dfrac{\partial G}{\partial H}$, $\dfrac{\partial G}{\partial z_i}$, $i = 1,2$ являются обобщенно-однородными того же класса, что и сама функция, но другого порядка [2], то намагниченность и энтропия являются обобщенно-однородными функциями.

Пусть $H = 0$, $\varepsilon \to 0$ и $\beta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\ln|M(\varepsilon,0)|}{\ln|\varepsilon|}$.

Здесь $\dfrac{\partial z_i}{\partial H} = \varepsilon\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial H} + a_{i2} + H\dfrac{\partial a_{i2}}{\partial H}$, $i = 1,2$, $z_1(\varepsilon,0,\lambda) = a_{11}(\varepsilon,0,\lambda)\varepsilon$, $z_2(\varepsilon,0,\lambda) = a_{21}(\varepsilon,0,\lambda)\varepsilon$.

Пусть существует такое $\lambda = \omega(\varepsilon)$, что $a_{21}(\varepsilon,0,\omega(\varepsilon)) = 0$, $a_{11}(\varepsilon,0,\omega(\varepsilon)) = -1$. Так как $s(-1,0) = 0$, то

$$\omega^p(\varepsilon)M(\varepsilon,0) = \ \ \varepsilon\frac{\partial a_{21}}{\partial H}\bigg|_{\substack{H=0\\ \lambda=\omega(\varepsilon)}} + a_{22}(\varepsilon,0,\omega(\varepsilon))\ \ M(\ \ 1,0),$$

$$\beta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left\|\left[\varepsilon\dfrac{\partial a_{21}}{\partial H}\bigg|_{\substack{H=0\\ \lambda=\omega(\varepsilon)}} + a_{22}(\varepsilon,0,\omega(\varepsilon))\right]\right\| M(-1,0) - p\ln|\omega(\varepsilon)|}{\ln\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Пусть $\varepsilon = 0$ и $H \to 0$. Тогда

$$\lambda^p M(0,H) = -s(a_{12}H, a_{22}H)\frac{\partial z_1}{\partial H}\Big|_{\varepsilon=0} + M(a_{12}H, a_{22}H)\frac{\partial z_2}{\partial H}\Big|_{\varepsilon=0}$$

Подберем $\lambda = \eta(H)$ так, чтобы $a_{12}(0,H,\eta(H)) = 0$, $a_{22}(0,H,\eta(H))H = 1$.

Тогда

$$\delta=\lim_{H\to 0}\frac{\ln|H|}{\ln|M(0,H)|}=\lim_{H\to 0}\frac{\ln|H|}{\ln\left|-s(0,1)\frac{\partial z_1}{\partial H}|_{\varepsilon=0}+M(0,1)\frac{\partial z_2}{\partial H}|_{\varepsilon=0}-p\ln|\eta(H)|\right|} \qquad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5), в частности, можно получить формулы $\beta=\frac{p-a_H}{a_\varepsilon}$, $\delta=\frac{a_H}{p-a_H}$.

Анализ критических показателей при выполнении (1.2) будет предметом следующей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стенли Х.Э.* Фазовые переходы и критические явления. М.: Наука, 1972.
2. *Эфендиев А.Р.* Некоторые свойства обобщенно-однородных функций и уравнений // Межвуз. сб. Вып. III, ч. 1. Махачкала: ДГУ, 1976. С. 162–168.
3. *Шестаков А.А.* Об асимптотическом поведении многомерных систем дифференциальных уравнений / Всесоюзный заочный институт инженеров железнодорожного транспорта // Тр. кафедры высш. матем. и теор. механики. М., 1961. С. 3–103.
4. *Хоменюк В.В.* О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями // Изв. вузов. 1961. № 3. С. 157–165.
5. *Эфендиев А.Р.* О гипотезе подобия // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения: межвуз. сб. Махачкала: ДГУ, 1991. С. 144–148.

Поступила в редакцию 12.02.2013 г.
Принята к печати 21.03.2013 г.