ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.9

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ПРОСТРАНСТВА $L_{\mu}^{p(x)}(E)$

И. И. Шарапудинов

Отдел математики и информатики ДНЦ РАН

В настоящей статье мы рассмотрим вопросы, связанные с приближенным вычислением интегралов. Рассматривается задача об оценке погрешности квадратурных формул для функций из классов $W_{p(\cdot)}^{r}(M,a,b)$, состоящих из функций $f = f(x)$, заданных на $[a,b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную $f^{(r)}$ порядка r, обладающую тем свойством, что $\| f^{(r)} \|_{p(\cdot)} ([a,b]) \le M$. Впервые такие классы были введены в работах автора в связи с задачей об оценке погрешностей квадратурных формул. Мы рассмотрим также некоторые новые классы функций, обладающих существенно переменным поведением гладкости на заданном отрезке $[a,b]$, и получим точные оценки погрешностей, так называемых усложненных квадратурных формул для этих новых классов. При решении этой задачи естественным образом появляются пространства $L_{\mu}^{p(x)}(E)$ с переменным показателем $p(x)$ и двойственные им пространсства $L_{\mu}^{p'(x)}(E)$, где $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$. А именно, в терминах этих пространств выражаются точные значения погрешностей квадратурных формул, учитывающих существенно переменное поведение гладкости функций $f(x)$, подлежащих приближенному интегрированию по отрезку $[a,b]$. Это позволяет получить для функций $f(x)$, обладающих переменной гладкостью на $[a,b]$, более точные оценки погрешностей усложненных квадратурных формул, использующие следующие величины

$$\| f \|_{p(\cdot),\Delta}^{*} (E) = \sup_{\substack{g\in LL_{\mu}^{p'(x)}(E), \\ \| g \|_{p'(\cdot),\Delta} \le 1}} \int_E f(x)g(x)\mu(dx), \quad \| f \|_{p(\cdot)}^{*} (E) = \| f \|_{p(\cdot),1}^{*} (E),$$

где $LL_{\mu}^{p'(x)}(E)$ – линейная оболочка пространства $L_{\mu}^{p'(x)}(E)$.

Some questions concerning approximate calculation of integrals are researched in the present paper. The problem of error estimations of quadrature formulas for the functions from classes $W_{p(\cdot)}^{r}(M,a,b)$, consist ing of functions $f = f(x)$, given on $[a,b]$, having absolutely continuous derivative $r-1$and derivative $f^{(r)}$ of order r, having property $\| f^{(r)} \|_{p(\cdot)} ([a,b]) \le M$ is considered. Such classes were introduced in the author's works in connection with the problem of error estimations of quadrature formulas. Some new classes of functions, having essentially variable behavior of smoothness on the given interval $[a,b]$, and the obtained exact error estimations of the so called complicated quadrature formulas for these new classes are also considered. When solving this problem spaces $L_{\mu}^{p(x)}(E)$ with variable exponent $p(x)$ and dual spaces $L_{\mu}^{p'(x)}(E)$, where $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$, appear naturally. Precisely, it expresses, in the terms of these spaces, the exact values of the estimations of the quadrature formulas taking into account essentially variable behavior of smoothness of functions $f(x)$ liable to approximate integration on interval $[a,b]$. It allows to get more exact error estimations of complicated quadrature formulas using the next values

$$\| f \|_{p(\cdot),\Delta}^{*} (E) = \sup_{\substack{g\in LL_{\mu}^{p'(x)}(E), \\ \| g \|_{p'(\cdot),\Delta} \le 1}} \int_E f(x)g(x)\mu(dx), \quad \| f \|_{p(\cdot)}^{*} (E) = \| f \|_{p(\cdot),1}^{*} (E),$$

where $LL_{\mu}^{p'(x)}(E)$ is a linear capsule of space $L_{\mu}^{p'(x)}(E)$.

Ключевые слова: пространства Лебега с переменным показателем; пространства Соболева с переменным показатем; квадратурные формулы; приближение функций.

Keywords: variable exponent Lebesgue spaces; variable exponent Sobolev spaces; quadrature formulas; function approximation.

1. Введение

Пространства функций, интегрируемых с переменным показателем, перестали играть роль экзотических примеров [1–6], так называемых модулярных пространств, и вышли на самостоятельный путь своего развития с того момента, когда было показано, что топология этих пространств нормируема и одна из эквивалентных норм определяется с помощью хорошо известной теоремы А.Н. Колмогорова о нормируемости линейных топологических пространств, в которых существует ограниченная уравновешенная выпуклая окрестность нуля. Для таких пространств А.Н. Колмогоровым [7] была введена норма с помощью функционала Минковского упомянутой выше окрестности. Именно на этом пути автором этих строк было показано в 1976 г. (публикация [8] 1979 г.), что пространство Лебега $L_\mu^{p(x)}(E)$ с переменным показателем $p(x)$, состоящее из измеримых на E функций $f(x)$, для которых степень $|f(x)|^{p(x)}$ интегрируема на E, при $p(x)\ge 1$ представляет собой нормированное пространство с нормой для $f\in L_\mu^{p(x)}(E)$, равной

$$\| f \|_{p(\cdot)}(E)=\inf\left\{\alpha>0:\int_E\left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)}\mu(dx)\le 1\right\}. \tag{1.1}$$

Такие нормы многие авторы почему-то называют нормами Люксембурга, вместо того, чтобы называть их *нормами Колмогорова*.

Следующий этап развития теории пространств $L_\mu^{p(x)}(E)$ был связан с ужесточением условий для переменного показателя $p(x)$ и получением для $L_\mu^{p(x)}(E)$ аналогов классических результатов, хорошо известных в том случае, когда $p(x)$ совпадает с некоторой константой. Первый шаг в этом направлении был сделан в нашей работе [9], в которой было показано, что если μ – обычная мера Лебега на прямой, то система Хаара является базисом пространства $L_\mu^{p(x)}([0,1])$ в том и только в том случае, когда переменный показатель $p(x)\ge 1$ удовлетворяет на $[0,1]$ условию Дини – Липшица

$$|p(x)-p(y)|\log\frac{1}{|x-y|}\le C \quad (|x-y|\le\frac{1}{2}).$$

При тех же предположениях в работе автора [10] было показано, что некоторые семейства операторов свертки равномерно ограничены в $L_\mu^{p(x)}([0,2\pi])$. Сюда, в частности, относятся широкий класс классических операторов, таких как операторы Фейера, Валле-Пуссена, Абеля, Стеклова и мн. др. Значительный вклад в развитие теории пространств $L_\mu^{p(x)}(E)$ был внесен в работах [11–13]. Наиболее яркий результат, полученный в этих работах, состоит в следующем. Пусть Ω – ограниченная область в R^n, μ – обычная мера Лебега в R^n, $p(x)$ определена на Ω и удовлетворяет условиям $1<p_-(\Omega)\le p(x)\le p^-(\Omega)<\infty$, $|p(x)-p(y)|\log\frac{1}{|x-y|}\le C \quad (|x-y|\le\frac{1}{2} \quad x,y\in\Omega)$, тогда оператор максимальной функции Харди – Литтльвуда $M(f)$ ограниченно действует в пространстве $L_\mu^{p(x)}(\Omega)$. Как следствие этого результата в [12] было показано, что при тех же ограничениях для переменного показателя $p(x)$ и некотором дополнительном условии на $p(x)$ вне некоторого шара хорошо известные операторы Кальдерона – Зигмунда ограниченно действуют в пространстве $L_{\mu}^{p(x)}(R^n)$. В частности, при $n=1$ отсюда следует ограниченность в $L_{\mu}^{p(x)}(R)$ преобразования Гильберта, если только $1<p_1\le p(x)\le p_2<\infty$, $|p(x)-p(y)|\log\frac{1}{|x-y|}\le C$ $(|x-y|\le\frac{1}{2}$ $x,y\in R)$ и для $p(x)$ найдется интервал, вне которого он совпадает с некоторой константой. Таким образом, обнаруженная впервые в работах автора [9, 10] связь между условием Дини – Липшица для переменного показателя $p(x)$ и равномерной ограниченностью в $L_{\mu}^{p(x)}(E)$ семейств классических операторов оказалась характерной для построения содержательной теории интегральных операторов в пространствах $L_{\mu}^{p(x)}(E)$. Как показали многочисленные результаты, полученные в последние годы специалистами в области теории дифференциальных уравнений, аналогичная картина наблюдается и при построении содержательной теории дифференциальных операторов в пространствах Соболева с переменным показателем. Обширный список литературы по этой теме можно найти, например, в опубликованной недавно монографии [14]. В этом списке особое место занимают работы [15–17], в которых впервые были обнаружены глубокие связи между задачами, возникающими в многомерном вариационном исчислении, и пространствами $L_{\mu}^{p(x)}(E)$. В работах [18–24] при том же логарифмическом условии Дини – Липшица для переменного показателя $p(x)$ исследованы свойства сингулярных интегралов в пространствах $L_{\mu}^{p(x)}(E)$.

В работе автора [25] было доказано, что тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k\in Z}$ является базисом пространства $L^{p(x)}(0,2\pi)$ тогда и только тогда, когда 2π-периодическая функция $p(x)>1$ удовлетворяет условию Дини – Липшица при $x,y\in[0,2\pi]$. А в другой нашей работе [26] было доказано, что система нормированных полиномов Лежандра $\{\hat{P}_n\}$ является базисом в $L^{p(x)}(-1,1)$, если переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет на $[-1,1]$ условию Дини – Липшица и некоторому дополнительному условию постоянства в сколь угодно малых окрестностях точек -1 и 1.

В нашей работе [27] впервые были исследованы некоторые вопросы, связанные с приближением функций тригонометрическими полиномами в пространствах $L^{p(x)}(0,2\pi)$. В последнее время интерес к этой задаче значительно возрос, и с уверенностью можно сказать, что в теории приближений возникло новое направление, связанное с конструированием различных типов модулей непрерывности функций $f\in L^{p(x)}(0,2\pi)$ и доказательством в $L^{p(x)}(0,2\pi)$ прямых и обратных теорем теории приближений. При этом следует отметить, что мы имеем дело с двумя случаями, принципиально отличающимися друг от друга. А именно, в первом случае речь идет о получении прямых и обратных теорем теории приближений в $L^{p(x)}(0,2\pi)$, когда 2π-периодический переменный показатель $p(x)$, удовлетворяющий на периоде $[0,2\pi]$ условию Дини – Липшица, строго больше 1 на всем периоде, т.е. $p_-=\min_{x\in[0,2\pi]}p(x)>1$. В этом случае в работах ряда авторов, в частности, в [28–33], доказаны прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах $L^{p(x)}(0,2\pi)$. Основным инструментом, используемым в этих работах для доказательства прямых и обратных теорем, является свойство базисности в $L^{p(x)}(0,2\pi)$ тригонометрической системы, установленное в работе автора [25], которое справедливо в том и только в том случае, если 2π-периодический переменный показатель $p(x)$, удовлетворяющий на периоде $[0,2\pi]$ условию Дини –

Липшица, строго больше 1 на всем периоде, т.е. $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) > 1$. В указанных работах [28–33] получены также обобщения прямых и обратных теорем теории приближений на весовые пространства Лебега с переменным показателем $p(x)$, для которого $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) > 1$.

Во втором случае речь идет о получении прямых и обратных теорем теории приближений в $L^{p(x)}(0,2\pi)$, когда 2π-периодический переменный показатель $p(x)$, удовлетворяющий на периоде $[0,2\pi]$ условию Дини – Липшица, не подчиняется условию $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) > 1$ и, стало быть, $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) = 1$. В этом случае тригонометрическая система не образует базиса $L^{p(x)}(0,2\pi)$, и, как следствие, методы доказательств прямых и обратных теорем теории приближений в пространствах $L^{p(x)}(0,2\pi)$ с $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) > 1$, применявшиеся в работах [28–33], не могут быть использованы для решения аналогичной задачи в $L^{p(x)}(0,2\pi)$ с $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) = 1$. Потребовалось разработать принципиально новые подходы к решению этой задачи в случае $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) \ge 1$. Она была решена в работе автора [34]. Новые подходы к доказательству прямых и обратных теорем в $L^{p(x)}(0,2\pi)$ при $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) \ge 1$ базируются на свойстве равномерной ограниченности в $L^{p(x)}(0,2\pi)$ семейства операторов В.А. Стеклова (функций Стеклова) и их сдвигов. Это свойство установлено впервые в работах автора [10] и [25] при условии, когда переменный показатель $p(x) \ge 1$ удовлетворяет условию условию Дини – Липшица. Более того, в [10] доказано, что условие Дини – Липшица не только достаточно, но и, в определенном смысле, необходимо для равномерной ограниченности в $L^{p(x)}(0,2\pi)$ семейства функций Стеклова $\left\{ f_h(x) = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+t)dt \right\}_{h>0}$. А с другой стороны, свойства модуля непрерывности $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}$, используемого в работе автора [34] для доказательства прямых и обратных теорем теории приближений, опираются на равномерную ограниченность в $L^{p(x)}(0,2\pi)$ семейства сдвигов $\{f_h(x+\tau)\}_{h>0,|\tau|\le h^\gamma}$, где $0<\gamma$ – произвольное число.

В настоящей статье мы рассмотрим вопросы, связанные с приближенным вычислением интегралов. Рассматривается задача об оценке погрешности квадратурных формул для функций из классов $W^r_{p(\cdot)}(M,a,b)$, состоящих из функций $f = f(x)$, заданных на $[a,b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную $f^{(r)}$ порядка r, обладающую тем свойством, что $\| f^{(r)} \|_{p(\cdot)}([a,b]) \le M$. Впервые такие классы были введены в работе [27] в связи с задачей об оценке погрешностей квадратурных формул. Мы рассмотрим также некоторые новые классы функций, обладающих существенно переменным поведением гладкости на заданном отрезке $[a,b]$, и получим точные оценки погрешностей, так называемых [35] усложненных квадратурных формул для этих новых классов. При решении этой задачи естественным образом появляются пространства $L^{p(x)}_\mu(E)$ с переменным показателем $p(x)$ и двойственные им пространсства $L^{p'(x)}_\mu(E)$, где $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$. А именно, в терминах этих пространств выражаются точные значения погрешностей квадратурных формул, которые учитывают существенно переменное поведение гладкости функций $f(x)$, подлежащих приближенному интегрированию по отрезку $[a,b]$. Это позволяет получить для функций $f(x)$, обладающих переменной гладкостью на $[a,b]$, более точные оценки погрешностей усложненных квадратурных формул, использующие следующие величины

$$\| f \|^*_{p(\cdot),\Delta}(E) = \sup_{\substack{g\in LL_\mu^{p'(x)}(E),\\ \|g\|_{p'(\cdot),\Delta}\le 1}} \int_E f(x)g(x)\mu(dx), \quad \| f \|^*_{p(\cdot)}(E) = \| f \|^*_{p(\cdot),1}(E), \tag{1.2}$$

где $LL_\mu^{p'(x)}(E)$ – линейная оболочка пространства $L_\mu^{p'(x)}(E)$. Эта задача подробно рассмотрена ниже в §7.

2. Некоторые свойства квадратурных формул

Мы приведем здесь некоторые хорошо известные [35] свойства квадратурных формул, которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть отрезок $[a,b]$, на котором задана непрерывная функция $f(x)$, разбит на части точками

$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \le b$$

и пусть заданы неотрицательные числа $p_k \ (k = 0,\ldots,m-1)$. Положим

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k). \tag{2.1}$$

Тогда приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx L(f) \tag{2.2}$$

называется квадратурной формулой, определяемой узлами x_k и весами p_k. Если для всех полиномов

$$P_{r-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1}x^{r-1}$$

степени $r-1\,(r\ge 1)$ приближенное равенство (2.2) можно заменить точным, то говорят, что формула (2.1) точна для алгебраических полиномов степени $r-1$ и пишут

$$\int_a^b P_{r-1}(x)dx = L(P_{r-1}).$$

Дадим точное выражение для остаточного члена $R_r(f)$ в равенстве

$$\int_a^b f(x)dx = L(f) + R_r(f) \tag{2.3}$$

в том случае, когда $f(x) \in W^r_{p(\cdot)}(M,0,1)$. Разложим эту функцию по формуле Тейлора:

$$f(x) = P_{r-1}(x) + R_r(x), \tag{2.4}$$

где

$$P_{r-1}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(r)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt.$$

Полагая

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1}, & \text{если } u \ge 0, \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

можем записать

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t)dt. \tag{2.6}$$

Пусть квадратурная формула $L(f)$ точна для всех полиномов степени $r-1$, тогда $L(P_{r-1})=\int_a^b P_{r-1}(x)dx$, поэтому с учетом (2.6) имеем

$$\int_a^b f(x)dx - L(f) = \int_a^b P_{r-1}(x)dx - L(P_{r-1}) + \int_a^b R_r(x)dx - L(R_r) =$$

$$\int_a^b R_r(x)(x)dx - L(R_r) =$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b\int_a^b K_r(x-t)f^{(r)}(t)dtdx - \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_a^b K_r(x_k-t)f^{(r)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b f^{(r)}(t)\left[\int_t^b K_r(x-t)dx - \int_a^b \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k-t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b f^{(r)}(t)\left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k-t)\right]dt. \tag{2.7}$$

Полагая

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k K_r(x_k-t)\right], \tag{2.8}$$

имеем из (2.7) и (2.3)

$$R_r(f) = \int_a^b F_r(t) f^{(r)}(t)dt. \tag{2.9}$$

Следуя С.М. Никольскому [35], введем понятие усложненной квадратурной формулы. С этой целью рассмотрим квадратурную формулу (2.1) для отрезка $[0,1]$. Тогда для узлов

$$0 \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \le 1 \tag{2.10}$$

и весов

$$p_0, p_1, \ldots, p_{m-1} \tag{2.11}$$

имеем

$$L(f) = L(0,1,f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k), \tag{2.12}$$

где f – произвольная непрерывная функция, заданная на $[0,1]$. Рассмотрим приближенное равенство

$$\int_0^1 f(x)dx \approx L(f) \tag{2.13}$$

как квадратурную формулу, определенную узлами (2.10) и весами (2.11).

Наряду с (2.13) рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx \approx L(\alpha,\beta,g) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k' g(x_k'). \tag{2.14}$$

Будем называть квадратурную формулу (2.12) подобной формуле (2.13), если выполняются соотношения

$$x_k' = \alpha + x_k(\beta-\alpha), \quad p_k' = p_k(\beta-\alpha) \quad (k=0,1,\ldots,m-1).$$

Пусть теперь задан произвольный отрезок $[a,b]$. Разделим его на n равных частей точками

$$t_k = a + kh, \quad k = 0,1,\ldots,n. \tag{2.15}$$

На каждом отрезке деления $[t_k, t_{k+1}]$ $(k = 0,\dots,n-1)$ применим квадратурную формулу, подобную формуле (2.14), а именно

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx \approx L(t_k, t_{k+1}, f),$$

складывая эти приближенные равенства при $k = 0,\dots,n-1$, мы получим следующую формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} L(t_k, t_{k+1}, f), \tag{2.16}$$

которая называется усложненной квадратурной формулой. Заметим, что если исходная (*каноническая*) квадратурная формула (2.12) является точной для полинома $P_{r-1}(x)$ степени $r-1$, то и усложненная формула (2.16) также точна для $P_{r-1}(x)$, т.е.

$$\int_a^b P_{r-1}(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} L(t_k, t_{k+1}, P_{r-1}). \tag{2.17}$$

Обозначим через $Q_n(f)$ остаточный член формулы (2.16) и получим для него интегральное представление в том случае, когда $f \in W_{p(\cdot)}^r(M,a,b)$. Имеем

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(t_k, t_{k+1}, f) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx - L(t_k, t_{k+1}, f) \right\} =$$

$$h \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_0^1 f(t_k + hu)du - L[f(t_k + hu)] \right\} =$$

$$h^{r+1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(t_k + hu)du, \tag{2.18}$$

где

$$F_r(u) = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m-1} K_r(x_k - t) \right]. \tag{2.19}$$

Далее

$$\int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(t_k + hu)du = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F_r\left(\frac{t-t_k}{h}\right) f^{(r)}(t)dt. \tag{2.20}$$

Определим функцию $\Phi(t) = \Phi_{r,n}(t)$ на $[a,b]$ следующим образом:

$$\Phi_{r,n}(t) = F_r\left(\frac{t-t_k}{h}\right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0,\dots,n-1. \tag{2.21}$$

Из (2.20) и (2.21) имеем

$$h \int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(t_k + hu)du = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_{r,n}(t) f^{(r)}(t)dt.$$

Подставим это выражение в (2.18), тогда

$$Q_n(f) = h^r \int_a^b \Phi_{r,n}(t) f^{(r)}(t)dt. \tag{2.22}$$

Это и есть искомое интегральное представление остаточного члена усложненной квадратурной формулы (2.16).

3. Оценки остаточных членов квадратурных формул для классов $W^r_{p(\cdot)}(M,a,b)$ и $W^{*r}_{p(\cdot)}(M,a,b)$

Пусть $1 < p(x) \le \overline{p} < \infty$ при $x \in [0,1]$, $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$, где здесь и далее $\overline{p} = \sup_{x\in[0,1]} p(x)$, $\underline{p} = \inf_{x\in[0,1]} p(x)$. Рассмотрим сначала каноническую квадратурную формулу (2.12) и получим оценку остаточного члена

$$R_r[W^r_{p(\cdot)}(1,0,1)] = \sup_{f\in W^r_{p(\cdot)}(1,0,1)} R_r(f), \tag{3.1}$$

считая, что формула (2.12) точна для полиномов $P_{r-1}(x)$ степени $r-1$. С этой целью обратимся к равенству (2.9) с $a=0$, $b=1$. Тогда

$$R_r(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t)dt, \tag{3.2}$$

где функция $F_r(t)$ определена равенством (2.19). В силу определения нормы $\| F_r \|^*_{p'(\cdot)}([0,1])$ (см. (1.2)) из (3.2) непосредственно имеем

$$\sup_{f\in W^r_{p(\cdot)}(1,0,1)} R_r(f) = \sup_{\| f^{(r)}\|_{p(\cdot)}([0,1])\le 1} \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t)dt = \| F_r \|^*_{p'(\cdot)}([0,1]). \tag{3.3}$$

Сопоставляя (3.1) и (3.3), выводим

$$R_r[W^r_{p(\cdot)}(1,0,1)] = \| F_r \|^*_{p'(\cdot)}([0,1]). \tag{3.4}$$

Совершенно аналогично из (2.22) выводим

$$Q_n[W^r_{p(\cdot)}(1,a,b)] = \sup_{f\in W^r_{p(\cdot)}(1,a,b)} Q_n(f) = h^r \| \Phi_{r,n} \|^*_{p'(\cdot)}([a,b]). \tag{3.5}$$

Теперь рассмотрим класс $W^{*r}_{p(\cdot)}(1,a,b)$. Если $f \in W^{*r}_{p(\cdot)}(1,a,b)$, то из (2.9) и (2.22) имеем

$$| R_r(f) | \le \| F_r \|_{p'(\cdot)}([a,b]) \| f^{(r)} \|^*_{p(\cdot)}([a,b]), \tag{3.6}$$

$$Q_n(f) \le \| \Phi_{r,n} \|_{p'(\cdot)}([a,b]). \tag{3.7}$$

Если переменный показатель $p(x)$ таков, что $1 < \underline{p}([a,b]) \le p(x) \le \overline{p}([a,b]) < \infty$, то в (3.6) и (3.7) имеют место знаки равенств. В самом деле, при указанном ограничении будет $1 < \underline{p'}([a,b]) \le p'(x) \le \overline{p'}([a,b]) < \infty$, и, стало быть, пространство $L^{p(x)}([a,b])$ совпадает с $[L^{p'(x)}([a,b])]'$. По этой причине $f^{(r)}$ пробегает весь единичный шар пространства $[L^{p'(x)}([a,b])]'$ с сильной нормой, когда $f \in W^{*r}_{p(\cdot)}(1,a,b)$. Поэтому, используя теорему Хана – Банаха, заключаем, что при $1 < \underline{p}([a,b]) \le p(x) \le \overline{p}([a,b])$ в оценках (3.6) и (3.7) достигаются знаки равенств.

4. Квадратурные формулы для классов $W^r_{p(\cdot)}(M,a,b)$ и $W^{*r}_{p(\cdot)}(M,a,b)$, содержащие значения производных

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) = L(f) + R(f), \tag{4.0}$$

задаваемую векторами узлов $X = \{x_k\}$ $(0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le 1)$ и коэффицентов $P = \{p_{kl}\}$ $(k = 1,2,\ldots,m,\quad l = 0,1,\ldots,\rho)$, $(0 \le \rho \le r-1)$, т. е. $L(f) = L(f; X, P)$, $R(f) = R(f; X, P)$. Требуется найти величину

$$R[\mathrm{M}] = R[\mathrm{M}; X, P] = \sup_{f\in \mathrm{M}} |R(f; X, P)|$$

для $\mathrm{M} = W_{p(\cdot)}^{r}(1,0,1)$ и $\mathrm{M} = W_{p(\cdot)}^{*r}(1,0,1)$. Пусть формула (4.0) точна для всех алгебраических полиномов $P_{r-1}(x)$ степени $r-1$. Тогда, повторяя почти дословно рассуждения, которые привели нас к равенству (2.6), мы придем к равенству (см. [35, с. 101 и 140])

$$R(f) = \int_0^1 f(x)dx - L(f) = \frac{(-1)^r}{r!}\int_0^1 G_r(t) f^{(r)}(t)dt, \tag{4.1}$$

где $f \in W_{p(\cdot)}^{r}(M,0,1)$,

$$G_r(t) = (t-1)^r - (-1)^r \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\rho} \frac{r!}{(r-l-1)!} p_{kl} K_{r-l}(t-l). \tag{4.2}$$

Оценим интеграл (4.1). Если почти всюду на $[0,1]$ $1 < p(x) \le \overline{p}([0,1])$, то

$$|R(f)| \le \frac{1}{r!} \| f^{(r)} \|_{p(\cdot)}([0,1]) \| G_r \|_{p'(\cdot)}^{*}([0,1]). \tag{4.3}$$

Из (4.1) в силу самого определения нормы $\| G_r \|_{p(\cdot)}^{*}([0,1])$ следует, что

$$R[W_{p(\cdot)}^{r}(1,0,1)] = \sup_{f\in W_{p(\cdot)}^{r}(1,0,1)} R(f) = \frac{1}{r!} \| G_r \|_{p(\cdot)}^{*}([0,1]). \tag{4.4}$$

Если же $f(x) \in W_{p(\cdot)}^{*r}(M,0,1)$, то из (4.1) имеем

$$R(f) \le \frac{1}{r!} \| f^{(r)} \|_{p(\cdot)}^{*}([0,1]) \| G_r \|_{p(\cdot)}([0,1]), \tag{4.5}$$

$$R[W_{p(\cdot)}^{*}(1,0,1)] \le \frac{1}{r!} \| G_r \|_{p(\cdot)}([0,1]) \tag{4.6}$$

Кроме того, почти везде на $[0,1]$ $1 < \underline{p} \le p(x) \le \overline{p} < \infty$, поэтому, как это следует из теоремы Хана – Банаха, в неравенстве (4.6) достигается знак равенства, т.е.

$$R[W_{p(\cdot)}^{*}(1,0,1)] = \frac{1}{r!} \| G_r \|_{p(\cdot)}([0,1]). \tag{4.7}$$

Замечание 4.1. Пусть $1 < p(x) \le \overline{p} < \infty$. Тогда для норм $\| f \|_{p'(\cdot)}$ и $\| f \|_{p'(\cdot)}^{*}$ вытекают неравенства

$$\| f \|_{p'(\cdot)} \le \| f \|_{p'(\cdot)}^{*} \le r_p \| f \|_{p'(\cdot)}([0,1]), \tag{4.8}$$

где $r_p \le \dfrac{1}{\underline{p}([0,1])} + \dfrac{1}{\underline{p'}([0,1])}$. Сопоставляя (4.4) и (4.8), мы можем записать

$$R[W^r(1,0,1)] \le \frac{r_p}{r!} \| G \|_{p'(\cdot)}([0,1]). \tag{4.9}$$

Введем для $f \in W_{p(\cdot)}^{r}(M,a,b)$ усложненную квадратурную формулу с производными

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} L(t_k, t_{k+1}, f), \tag{4.10}$$

где $t_k = a + kh\ (k = 0,1,\ldots,n-1)$, $h = \dfrac{b-a}{n}$,

$$L(t_k, t_{k+1}, f) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho} p'_{jl} f^{(l)}(x'_{kj}), \tag{4.11}$$

$$x'_{kj} = t_k + hx_j, \quad p'_{j,l} = h^{\rho+1} p_{j,l} \quad (k = 0,\ldots,n-1).$$

Имеем в силу (4.11) и (4.1)

$$Q_{n,\rho}(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(t_k, t_{k+1}; f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx - L(t_k, t_{k+1}, f)\right] =$$

$$= h\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_0^1 f(t_k + hu)du - L[f(t_k + hu)]\right\} =$$

$$h\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{r!}\int_0^1 G_r(t) f^{(r)}(t_k + ht)dt. \tag{4.12}$$

Положим

$$\Phi_{r,n,\rho}(x) = \frac{(-1)^r}{r!} G_r\left(\frac{t-t_k}{h}\right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{4.13}$$

Тогда

$$\frac{(-1)^r}{r!}\int_0^1 G_r(t) f^{(r)}(t_k + ht)dt = h^r \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_{r,n,\rho}(t) f^{(r)}(t)dt. \tag{4.14}$$

Сопоставляя (4.12) с (4.14), получаем

$$Q_{n,\rho}(f) = \int_a^b \Phi_{r,n,\rho}(t) f^{(r)}(t)dt. \tag{4.15}$$

Точно так же, как из (4.1) мы вывели соотношения (4.4), (4.6) и (4.7), из (4.15) находим $(1 < p(x) \le \overline{p}([a,b]) < \infty)$

$$Q_{n,\rho}[W^r_{p(\cdot)}(1,a,b)] = \sup_{f \in W^r_{p(\cdot)}(1,a,b)} Q_{n,\rho}(f) = \| \Phi_{r,n,\rho} \|^*_{p(\cdot)}([a,b]), \tag{4.16}$$

$$Q_{n,\rho}[W^{*r}_{p(\cdot)}](1,a,b) = \sup_{f \in W^{*r}_{p(\cdot)}(1,a,b)} Q_{n,\rho}(f) \le \| \Phi_{r,n,\rho} \|_{p(\cdot)}([a,b]). \tag{4.17}$$

Если, кроме того, $1 < \underline{p}([a,b]) \le p(x) \le \overline{p}([a,b]) < \infty$, то в неравенстве (4.17) имеет место равенство.

5. Квадратурные формулы в периодическом случае

Отдельного рассмотрения заслуживает задача о вычислении погрешности квадратурной формулы на подклассах $\widetilde{W}^r_p(1) = \widetilde{W}^r_p(1,0,1)$ и $\widetilde{W}^{*r}_p(1) = \widetilde{W}^{*r}_p(1,0,1)$ классов $W^r_p(1) = W^r_p(1,0,1)$ и $W^{*r}_p(1) = W^{*r}_p(1,0,1)$, соответственно, состоящих из периодических функций с периодом, равным 1. Пусть $1 < p(t) \le \overline{p} < \infty$, $f \in \widetilde{W}^r_p(1)$. В этих условиях для остатка $R(f)$ квадратурной формулы (4.1), точной для констант, имеет место представление (см. [35, с. 170])

$$R(f)=\frac{(-1)^r}{r!}\int_0^1 \tilde{G}_r(t)f^{(r)}(t)dt, \tag{5.1}$$

где

$$\tilde{G}_r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\rho}\frac{(-1)^l r!}{(r-l)!}p_{kl}B_{r-l}^*(t-x_k)+C_r \tag{5.2}$$

$$B_r^*(t)=\frac{r!}{2^r\pi^r}B_r(2\pi t)\quad (r=2,3,\ldots),$$

$$B_1^*(t)=\begin{cases}-\frac{1}{\pi}B_1(2\pi t) & (0<t<1)\\ -\frac{1}{\pi}B_1(0+0)=-\frac{1}{2} & (t=0);\quad B_1^*(t+1)=B_1^*(t),\end{cases}$$

$B_r(u)$ – полиномы Бернулли (см. [35]), а C_r – произвольная постоянная.

Следуя известной в случае постоянного p схеме, выберем C_r из условия минимума нормы $\|\tilde{G}_r\|_{p'}$. Из (5.1) получаем для $f\in\tilde{W}_p^{*r}(1)$

$$R(f)\le\frac{1}{r!}\|f\|_p^*\|\tilde{G}_r\|_{p'}\le\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|_{p'}. \tag{5.3}$$

Отсюда

$$R[\tilde{W}_p^{*r}(1)]\le\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|_{p'}. \tag{5.4}$$

Аналогично получаем

$$R[\tilde{W}_p^{r}(1)]\le\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|_{p'}^*, \tag{5.5}$$

где константа C_r в (5.2) выбрана из условия минимума нормы $\|\tilde{G}_r\|_{p'}$.

Пусть $1<\underline{p}\le p(t)$. Покажем, что в этом случае в (5.4) и (5.5) имеют место знаки равенства. Воспользуемся критерием наименее уклоняющегося полинома по норме пространства $L^{p'(t)}([0,1])$, установленного в [8] (с. 629). Поскольку при $1<\underline{p}\le p(t)\le\overline{p}<\infty$ будет $1<\underline{p'}\le p'(t)\le\overline{p'}<\infty$, то, согласно упомянутому критерию, для того чтобы константа C_r давала минимум норме $\|G_r\|_{p'}$, среди всех констант необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\alpha(t)\in L^{p(t)}([0,1])$, для которой выполнены следующие условия:

1) $\|\alpha\|_p^*=1;$

2) $\int_0^1\alpha(t)dt=0;$

3) $\int_0^1\tilde{G}_r(t)\alpha(t)dt=\|\tilde{G}_r\|_{p'}.$

Условия 1) и 2) означают, что r-й периодический интеграл от $\alpha(t)$ принадлежит $\tilde{W}^{*r}_{p}$, и тогда условие 3) означает, что в рассматриваемом случае в (5.4) имеет место знак равенства, т.е. при $1<\underline{p}\le p(t)\le \overline{p}<\infty$ справедливо

$$R[\tilde{W}^{*r}_{p}(1)]=\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|_{p'}\,. \tag{5.6}$$

Те же рассуждения, проведенные для нормы $\|\cdot\|^{*}_{p'}$ в $L^{p'(t)}$, с учетом (2.55) приведут нас к равенству

$$R[\tilde{W}^{r}_{p}(1)]=\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|_{p'}, \tag{5.7}$$

где $1<\underline{p}\le p(t)\le \overline{p}<\infty$, а C_r в (5.7) выбрана из условия минимума нормы $\|\tilde{G}\|^{*}_{r\,p'}$.

Итак, установлена

Теорема 5.5.1. *Если почти всюду на* $[0,1]\ 1<p(t)\le\overline{p}<\infty$, *то*

$$R[\tilde{W}^{r}_{p}(1)]\le\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|^{*}_{p'},\quad R[\tilde{W}^{*r}_{p}(1)]\le\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|_{p},$$

а если, кроме того, $1<\underline{p}\le p(t)\le\overline{p}<\infty$, *то*

$$R[\tilde{W}^{r}_{p}(1)]=\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|^{*}_{p'},\quad R[\tilde{W}^{*r}_{p}(1)]=\frac{1}{r!}\|\tilde{G}_r\|_{p}$$

где константа C_r *в (5.2) выбрана из условия минимума соответственно норм* $\|G_r\|^{*}_{p'}$ *и* $\|G_r\|_{p'}$.

Из (4.8) и (5.5) получаем оценку сверху

$$R[\tilde{W}^{r}_{p}(1)]\le\frac{r_p}{r!}\|\tilde{G}_r\|_{p'}\quad \left(r_p\le\frac{1}{\underline{p}}+\frac{1}{\underline{p}'}\right), \tag{5.8}$$

где $1<p(t)\le\overline{p}<\infty$, а G_r можно считать выбранной из условия минимума нормы $\|\tilde{G}_r\|_{p'}$.

6. Классы $\tilde{W}^{r}_{p,\Delta}(M,a,b)$, $\tilde{W}^{*r}_{p,\Delta}(M,a,b)$, $W^{r}_{p,\Delta}(M,a,b)$, $W^{*r}_{p,\Delta}(M,a,b)$

Если $1<p(t)<\infty$ почти всюду на E, то в пространстве $LL^{p(t)}(E)$ можно ввести нормы вида (1.2) и, соответственно, можем определить классы $\tilde{W}^{r}_{p,\Delta}(M,a,b)$, $\tilde{W}^{*r}_{p,\Delta}(M,a,b)$, $\tilde{W}^{r}_{p,\Delta}(1)$, $\tilde{W}^{*r}_{p,\Delta}(1)$, $W^{r}_{p,\Delta}(M,a,b)$, $W^{*r}_{p,\Delta}(M,a,b)$, $W^{r}_{p,\Delta}$, $W^{*r}_{p,\Delta}$ по аналогии с соответствующими классами для норм $\|\varphi\|_p\,(E)$ и $\|\varphi\|^{*}_p\,(E)$. Дословно повторяя соответствующие рассуждения, проведенные для норм $\|\varphi\|_p\,(E)$ и $\|\varphi\|^{*}_p\,(E)$, получаем следующие соотношения $\left(\frac{1}{p(t)}+\frac{1}{p'(t)}=1\right)$:

$$\int_E f(t)g(t)dt\le\|f\|^{*}_{p,\Delta}(E)\cdot\|g\|_{p',\Delta}(E)\quad (f\in LL^{p(t)}(E),\quad g\in LL^{p'(t)}(E)), \tag{6.1}$$

$$\| f \|_{p,\Delta}^{*} (E) \le r_p(E) \cdot \| f \|_{p,\Delta} (E)\Delta, \quad \left(r_p(E) \le \frac{1}{\underline{p}(E)} + \frac{1}{\underline{p'}(E)} \right) \tag{6.2}$$

$$\int_E f(t)g(t)dt \le r_p(E)\Delta \| f \|_{p,\Delta} (E) \| g \|_{p',\Delta} (E), \tag{6.3}$$

$$R[W_{p,\Delta}^{r}] = \frac{1}{r!} \| G_r \|_{p',\Delta}^{*}, \tag{6.4}$$

$$R[W_{p,\Delta}^{*r}] \le \frac{1}{r!} \| G_r \|_{p',\Delta}, \tag{6.5}$$

$$R[W_{p,\Delta}^{*r}] = \frac{1}{r!} \| G_r \|_{p',\Delta} \quad (1 < \underline{p} \le p(t) \le \overline{p} < \infty), \tag{6.6}$$

$$R[W_{p,\Delta}^{r}] \le \frac{r_p \cdot \Delta}{r!} \| G_r \|_{p',\Delta} \quad \left(r_p \le \frac{1}{\underline{p}} + \frac{1}{\underline{p'}} \right) \tag{6.7}$$

$$R[\tilde{W}_{p,\Delta}^{*r}(1)] \le \frac{1}{r!} \| \tilde{G}_r \|_{p',\Delta}, \tag{6.8}$$

$$R[\tilde{W}_{p,\Delta}^{r}(1)] = \frac{1}{r!} \| \tilde{G}_r \|_{p',\Delta}^{*} \quad (1 < \underline{p} \le p(t) \le \overline{p} < \infty), \tag{6.9}$$

$$R[\tilde{W}_{p,\Delta}^{r}(1)] \le \frac{r_p\Delta}{r!} \| \tilde{G}_r \|_{p',\Delta} \quad \left(r_p \le \frac{1}{\underline{p}} + \frac{1}{\underline{p'}} \right), \tag{6.10}$$

где квадратурная формула (4.1) точна для многочленов степени $r-1$ в непериодическом случае и для констант в периодическом случае. $G_r(t)$ и $\tilde{G}_r(t)$ определены в (4.6) и (5.2) соответственно, а константа C_r в (5.2) выбрана из условия минимума норм в правых частях соотношений (6.8) – (6.10).

7. Классы $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M,a,b)$ и комбинированные квадратурные формулы

В настоящем параграфе мы конструируем комбинированные квадратурные формулы для функций $f = f(x)$, обладающих существенно переменным поведением, на отрезке $[a,b]$. С этой целью мы введем ниже классы $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a,b)$. Для их определения нам понадобится ряд обозначений. А именно, пусть s – натуральное число, $a = a_o < a_1 < \dots < a_s = b$, измеримая функция $p = p(x)$ определена на $[a,b]$ и удовлетворяет условию $1 \le p(x) \le \overline{p}([a,b]) < \infty$. Для $r \in N$ положим $W_{p(\cdot)}^{r}(c,d) = \cup_{K>0} W_{p(\cdot)}^{r}(K,c,d)$. Далее, пусть $r_i \in N (i = 1,\dots,s)$, $r(x) = r_i$ при $x \in (a_{i-1}, a_i)$. Через $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a,b)$ обозначим пространство функций $f = f(x)$, заданных на $[a,b]$ и таких, что $f \in W_{p(\cdot)}^{r_i}(a_{i-1}, a_i)$ при каждом $i = 1,\dots,s$. Если $f \in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(a,b)$, то мы положим $r=(r_1,\ldots,r_s)$, $f^r(x)=f^{(r(x))}(x)$. Подкласс функций $f\in W^{r(\cdot)}_{p(\cdot)}(a,b)$, для которых $\| f^r \|_{p(\cdot)}([a,b])\le M$, обозначим через $W^{r(\cdot)}_{p(\cdot)}(M,a,b)$.

Мы перейдем теперь к конструированию квадратурных формул для $f\in W^{r(\cdot)}_{p(\cdot)}(a,b)$, учитывающих существенно переменный характер гладкости таких функций f на отрезке $[a,b]$. Итак, пусть $a=a_0<a_1<\cdots<a_{s-1}<a_s=b$, $f\in W^{r(\cdot)}_{p(\cdot)}(a,b)$. Тогда мы имеем

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{s-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx. \tag{7.1}$$

Для приближения интеграла $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$ мы применим усложненную квадратурную формулу вида (2.16). При этом для каждого отрезка $[a_i,a_{i+1}]$ мы выберем свою (зависящую от i) каноническую квадратурную формулу с узлами

$$0\le x_{i,0}<x_{i,1}<\cdots<x_{i,m_i-1}\le 1$$

и весами $p_{i,j}$ $(j=0,1,\ldots,m_i-1)$ и рассмотрим усложненную квадратурную формулу

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n_i-1} L_i(t_{i,k},t_{i,k+1},f), \tag{7.2}$$

где

$$L_i(t_{i,k},t_{i,k+1},f)=\sum_{j=0}^{m_i-1} p'_{i,j}\, f(x^k_{i,j}), \tag{7.3}$$

$$p_{i,j}'=p_{i,j}h_i,\quad x^k_{i,j}=t_{i,k}+x_{i,j}h_i\quad (j=0,1,\ldots m_i-1), \tag{7.4}$$

$$h_i=\frac{a_{i+1}-a_i}{n_i}\quad (i=0,1,\ldots s-1).$$

Будем считать, что при каждом i узлы $x_{i,j}$ и веса $p_{i,j}$ $(j=0,1,\ldots m_i-1)$ выбраны так, чтобы соответствующая каноническая квадратурная формула

$$\int_0^1 f(x)dx\approx\sum_{j=0}^{m_i-1} p_{i,j}\, f(x_{i,j}) \tag{7.5}$$

была точна для всех алгебраических полиномов $P_{r_i-1}(x)$ степени не выше r_i-1. Тогда тем же свойством обладает и формула (7.2). Следовательно,

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_{r_i-1}(x)dx=\sum_{k=0}^{n_i-1} L_i(t_{i,k},t_{i,k+1},P_{r_i-1})\quad (i=0,1,\ldots s-1). \tag{7.6}$$

Пусть

$${}_iF_{r_i}(t)=\frac{1}{(r_i-1)!}\left[\frac{(1-t)^{r_i}}{r_i}-\sum_{j=0}^{m_i-1} p_{i,j}K_{r_i}(x_{i,j}-t)\right], \tag{7.7}$$

$$_i\Phi_{r_i,n_i}(t) = {}_iF_{r_i}\left(\frac{t-t_{i,k}}{h_i}\right), \quad t\in[t_{i,k},t_{i,k+1}], \quad k=0,1,\ldots,n_i-1, \tag{7.8}$$

$$R=\{r_1,\ldots r_{s-1}\}, \quad N=\{n_0,\ldots,n_{s-1}\},$$

$$\Phi(t)=\Phi(t,R,N)=h^{r_i}{}_i\Phi_{r_i,n_i}(t), \quad t\in[a_i,a_{i+1}], i=0,\ldots,s-1. \tag{7.9}$$

Тогда из (2.22) и (7.2) имеем

$$_iQ_{n_i}(f)=\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)-\sum_{k=0}^{n_i-1}L_i(t_{i,k},t_{i,k+1},f)=$$

$$h^{r_i}\int_{a_i}^{a_{i+1}} {}_i\Phi_{r_i,n_i}(t)f^{(r_i)}(t)dt=\int_{a_i}^{a_{i+1}}\Phi(t,R,N)f^{(r_i)}(t)dt. \tag{7.10}$$

Далее положим $A=\{a_0,a_1,\ldots,a_s\}$,

$$L(A,N,f)=\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{k=0}^{n_i-1}L_i(t_{i,k},t_{i,k+1},f). \tag{7.11}$$

Тогда приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx\approx L(A,N,f) \tag{7.12}$$

будем называть комбинированной усложненной квадратурной формулой. Обозначим погрешность этой формулы через $Q(A,N,f)$, т.е.

$$Q(A,N,f)=\int_a^b f(x)dx-L(A,N,f). \tag{7.13}$$

Из (7.10), (7.11) и (7.13) мы можем записать

$$Q(A,N,f)=\sum_{i=0}^{s-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\Phi(t,R,N)f^{(r_i)}(x)dx=$$

$$\int_a^b\Phi(x,R,N)f^{(r(x))}(x)dx. \tag{7.14}$$

Если мы теперь воспользуемся определением нормы $\|\Phi(R,N)\|_{p'(\cdot)}^{*}([a,b])$ (см. (2.2)), то из (7.14) непосредственно имеем

$$Q(W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(1,a,b))=\sup_{f\in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(1,a,b)}Q(A,N,f)=$$

$$\sup_{\|f^{(r(\cdot))}\|_{p(\cdot)}([a,b])\le 1}\int_a^b\Phi(t,R,N)f^{(r(t))}(t)dt=\|\Phi(R,N)\|_{p'(\cdot)}^{*}([a,b]). \tag{7.15}$$

Рассмотрим одну совсем простую задачу из численного анализа, решение которой приводит к идее применения комбинированных усложненных квадратурных формул и построению классов $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M,a,b)$ с переменным показателем $p(x)$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 x^{1/4} = 0.8.$$

Для приближенного вычисления левой части этого равенства используем два способа с применением усложненной квадратурной формулы трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = L(f) + R(f) = \frac{h(f(a) + f(b))}{2} + h\sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh) + R_n(f),$$

где $h = (b-a)/n$. В первом случае применим эту формулу к отрезку $[0,1]$:

$$\int_0^1 x^{1/4}dx = L(f) + R(f) = \frac{h}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}(jh)^{\frac{1}{4}} + R_n, \ (A)$$

а во втором случае представим интеграл I в виде

$$I = \int_0^1 x^{\frac{1}{4}}dx = I_1^{\varepsilon} + I_2^{\varepsilon},$$

где

$$I_1^{\varepsilon} = \int_0^{\varepsilon} x^{\frac{1}{4}}dx, \quad I_2^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 x^{\frac{1}{4}}dx,$$

и вычислим приближенно каждый из интегралов I_1^{ε} и I_2^{ε} по указанной формуле трапеций и результаты просуммируем. Тем самым мы получим комбинированную усложненную формулу

$$\int_0^1 x^{1/4}dx = L_{n_1}(0,\varepsilon) + L_{n_2}(\varepsilon,1) + R^{\varepsilon}_{n_1,n_2}, (B)$$

где

$$L_{n_1}(0,\varepsilon) = \frac{h_1\varepsilon^{1/4}}{2} + h_1\sum_{j=1}^{n_1-1}(jh_1)^{\frac{1}{4}},$$

$$L_{n_2}(\varepsilon,1) = \frac{h_2(\varepsilon^{1/4}+1)}{2} + h_2\sum_{j=1}^{n_2-1}(\varepsilon + jh_2)^{\frac{1}{4}}.$$

Приведем здесь небольшую таблицу, содержащую результат компьютерного эксперимента по приближенному вычислению интеграла $I = \int_0^1 x^{1/4}$ с применением квадратурных формул (A) и (B):

1. $n = n_1 + n_2$, $\varepsilon = 0.1$,
   (a) $R_{50} = 2.401888E-03$, $R^{\varepsilon}_{10,40} = 1.050353E-03$;
   (b) $R_{100} = 1.011312E-03$, $R^{\varepsilon}_{60,40} = 1.562834E-04$;
   (c) $R_{200} = 4.253387E-04$, $R^{\varepsilon}_{100,100} = 6.479025E-05$;
   (d) $R_{200} = 4.253387E-04$, $R^{\varepsilon}_{120,80} = 5.722046E-05$;
   (e) $R_{200} = 4.253387E-04$, $R^{\varepsilon}_{130,70} = 5.674362E-05$;

2. $n = n_1 + n_2$, $\varepsilon = 0.01$,
   (a) $R_{50} = 2.401888E-03$, $R^{\varepsilon}_{10,40} = 4.172325E-04$;
   (b) $R_{100} = 1.011312E-03$, $R^{\varepsilon}_{40,60} = 1.761913E-04$;
   (c) $R_{200} = 4.253387E-04$, $R^{\varepsilon}_{50,150} = 3.51674E-05$.

Из таблицы непосредственно следует, что при совпадении числа узлов формул $A)$ и $B)$ комбинированная усложненная формула трапеций $B)$ дает существенно более точное значение интеграла $I = \int_0^1 x^{1/4}dx$, чем обычная усложненная формула трапеций $A)$. Обнаруженный нами отдельный результат не является случайным. Это объясняется достаточно просто. Дело в том, что функция $x^{1/4}$ обладает высокой гладкостью на сегменте $[\varepsilon,1]$, вследствие чего формула трапеций, будучи примененной к интегралу $I=\int_{\varepsilon}^{1}x^{1/4}dx$, дает его значение с высокой точностью. А особая точка $x=0$ функции $x^{1/4}$, в которой ее производная обращается в ∞, оказывает преимущественное влияние на результат приближенного вычисления интеграла I_1^{ε} с помощью формулы $L_{n_1}(0,\varepsilon)$, не давая этой формуле «проявить свои хорошие вычислительные возможности». Но это отрицательное влияние особой точки функции $x^{1/4}$ компенсируется за счет выбора достаточно малой длины интервала $[0,\varepsilon]$. Комбинированные усложненные квадратурные формулы позволяют учитывать при решении задачи приближенного вычисления интегралов от функций $f\in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M,a,b)$ их локальные свойства и переменное поведение производной $f^{(r(x))}(x)$, а свойства пространств $L^{p(x)}([a,b])$ дают возможность точно выразить величину погрешности комбинированных усложненных квадратурных формул на классах $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M,a,b)$ (см. ра-венство (7.15)).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00191-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Orlicz W.* Uber konjugierte Exponentenfolgen // Studia Math. 1931. Vol. 3. P. 200–212.
2. *Nakano H.* Modulared Semi-ordered Linear Spaces. Tokyo: Maruzen Co., Ltd., 1950.
3. *Nakano H.* Topology and Topological Linear Spaces. Tokyo: Maruzen Co., Ltd., 1951.
4. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
5. *Musielak J. and Orlicz W.* On modular spaces // Studia Math. 1959. Vol. 18. P. 49–65.
6. *Tsenov I. V.* Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s// (Russian) Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ. 1961. Vol. 7. P. 25–37.
7. *Колмогоров А. Н.* Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes // Studia Math. 1934. Vol. 5. P. 29–33.
8. *Шарапудинов И.И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26. Вып. 4. С. 613–632.
9. *Шарапудинов И.И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Матем. сборник. 1986. Т. 130 (172). № 2 (6). С. 275–283.
10. *Шарапудинов И.И.* О равномерной ограниченности в L^p $(p=p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Матем. заметки. 1996. Т. 59. Вып. 2. С. 291–302.
11. *Diening L.* Maximal function on generalized Lebesgue spaces Lp(·) // Math. Inequal. Appl. 2004. Vol. 7. P. 245–253.
12. *Diening L. and Ruħička M.* Calderon-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems related to fluid dynamics // J. Reine Angew. Math. 2003. N 563. P. 197–220.
13. *Diening L., Hästö P. and Nekvinda A.* Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Proceedings of the Conference held in Milovy, Bohemian-Moravian Uplands, May 28 – June 2, 2004. Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republick, Praha.
14. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent. Lecture Notes in Mathematics 2017 / *L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ruħička* // Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 2011.
15. *Zhikov V.V.* Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory // Math. USSR Izv. 1987. Vol. 29 N 1. P. 33–66. [Translation of Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1986. Vol. 50. N 4. P. 675–710, 877.]

16. *Zhikov V.V.* Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system // Differ. Equ. 1997. Vol. 33. N 1. P. 108–115. [Translation of Differ. Uravn. 1997 Vol. 33. N 1. P. 107–114, 143].
17. *Zhikov V.V.* On some variational problems // Russian J. Math. Phys. 1997. Vol. 5. N 1. P. 105–116 (1998).
18. *Kokilashvili V., Samko N. and Samko S.* Singular operators in variable spaces $L^{p(\,)}(\Omega,\rho)$ with oscillating weights // Math. Nachr. 2007. Vol. 280. P. 1145–1156.
19. *Kokilashvili V. and Samko S.* Singular integral equations in the Lebesgue spaces with variable exponent // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2003. Vol. 131. P. 61–78.
20. *Kokilashvili V. and Samko S.* Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent // Georgian Math. J. 2003. Vol. 10. P. 145–156.
21. *Kokilashvili V. and Samko S.* Weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents of classical operators on Carleson curves // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2005. Vol. 138. P. 106–110.
22. *Kokilashvili V. and Samko S.* Singular Integrals in Weigted Lebesgue Spaces with Variable Exponent // Georgian Math. J. 2003. Vol. 10. N 1. P. 145–156.
23. *Samko S.* Convolution type operators in Lp(x) // Integr. Transform. Spec. Funct. 1998. Vol. 7. N 1, 2. P. 123–144.
24. *Samko S.* Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces // Fract. Calc. Appl. Anal. 2003. N 6. P. 355–362.
25. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}$ // Analysis Mathematica. 2007. T. 33. № 2. C. 135–153.
26. *Шарапудинов И.И.* О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве $L^{p(x)}(\ 1,1)$ с переменным показателем $p(x)$ // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 1. С. 137–160.
27. *Шарапудинов И.И.* Приближение функций в метрике пространства $L^{p(x)}([a,b])$ и квадратурные формулы // Constructive function theory'81. Procedings of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna, June 1–5, 1981. C. 189–193.
28. *Guven A. and Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // Journal of Math. Inequalities. 2010. Vol. 4. N 2. P. 285–299.
29. *Akgun R.* Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth // Georgian Math. J. 2011. N 18. P. 203–235. DOI 10.1515/GMJ.2011.0022
30. *Akgun R.* Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent // Ukr. Math. Journal. 2011. Vol. 63. N 1. (Ukrainian Original. 2011. Vol. 63. N 1).
31. *Akgun R. and Kokilashvili V.* On converse theorems of trigonometric approximation in weghted variable exponent Lebesgue spaces // Banach J. Math. Anal. 2011. Vol. 5 N 1. P. 70–82.
32. *Guven A.* Trigonometric approximation by matrix transforms in Lp(x) // Anal. and Appl. 2012. Vol. 10. N 1. P. 47–65.
33. *Akgun R. and Kokilashvili V.* The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces // Georgian Math. J. 2011. Vol. 18. N 3. P. 399–423.
34. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближения функций тригонометрическими полиномами в $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Математический форум. Т. 5. Исследования по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2011. С. 108–116.
35. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 15.03.2012 г.
Принята к печати 21.12.2012 г.