УДК 517.518.886

ИНТЕГРАЛЬНАЯ СИНХРОННОСТЬ ФУНКЦИЙ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(С ФИКСИРОВАННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ)

А. Я. Якубов[1], Я. А. Якубов[2]

[1]Чеченский государственный университет
[2]Дагестанский филиал ОАО «РусГидро»

В работе приводится полное решение исторической проблемы П.Л. Чебышева, связанной с интегральными неравенствами и решение дискретного аналога этой проблемы, а также некоторые обобщения неравенств Чебышева.

We give a solution of the problem put by Chebyshev in relation to some integral inequalities related to his name. We also soilve a discrete analogue of this problem and consider some generalizations.

Ключевые слова: интегральные неравенства; неравенства Чебышева; обобщения неравенств Чебышева; пределы интегрирования.

Keywords: synchronism, antisynchronism, integral synchronism, almost synchronism, direct Chebyshev inequalities, inverse Chebyshev inequalities.

1. Введение

Известно, что теория нелинейных интегральных уравнений Вольтерра базируется в основном на априорных оценках решений в конусах неорицательных функций.

Априорные оценки играют фундаментальную роль как в теории разрешимости, так и в теории отсутствия (разрушения) решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра.

Основным математическим аппаратом для получения априорных оценок решений нелинейных интегральных уравнений являются различные интегральные неравенства. Наиболее приспособленными для получения априорных оценок решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра являются интегральные неравенства Чебышева, особенно интегральные неравенства типа Чебышева для интегральных сверток.

Такие неравенства были известны только для класса монотонных функций, что позволяло рассматривать только узкий класс уравнений с монотонной нелинейностью и в основном лишь уравнения со слабой монотонной нелинейностью.

Кроме того, интегральные неравенства Чебышева с постоянными пределами интегрирования имеют многочисленные приложения в самых различных областях применения математики (см. [4–12]).

2. Постановка задач

В 1882 г. в работе [2] П.Л. Чебышев получил следующее разложение интеграла от произведения функций u и v

$$\int_a^b u\,v\theta dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\int_a^b u\,\psi_k \theta dx \int_a^b v\,\psi_k \theta dx}{\int_a^b \psi_k^2\,\theta dx} + R_n,$$

где θ – некоторая положительная в пределах от a до b функция. $\psi_0, \psi_1, \dots$ – ортонормированная относительно веса θ система функций. Чебышев обнаружил, что величина R_n – остаточный член, обладает следующими свойствами:

1. Числовая величина его не превосходит $\frac{\int \psi_n^2 dx}{\left(\frac{d^n \psi_n(x)}{dx^n}\right)^2} AB$, где A, B наибольшие числовые величины производных $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ в пределах интегрирования.

2. Если в пределах интегрирования $[a,b]$ производные $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ не меняют своего знака, дополнительный член R_n имеет одинаковый знак с произведением $\frac{d^n u}{dx^n}\frac{d^n v}{dx^n}$.

При $n=1$ имеем $\psi_0 = 1$ и

$$\int_a^b u\,v\theta dx > \text{или} < \frac{\int_a^b u\,\theta dx \cdot \int_a^b v\,\theta dx}{\int_a^b \theta\,dx},$$

если обе функции u и v одной монотоности или если одна возрастает, а другая убывает.

Введем обозначения для средних величин

$$\sigma(u,v)_{a,b} = \sigma(uv) = \frac{\int_a^b u\,v\theta dx}{\int_a^b \theta\,dx},$$

$$\sigma(u)_{a,b} = \sigma(u) = \frac{\int_a^b u\,\theta dx}{\int_a^b \theta\,dx},\ \sigma(v)_{a,b} = \sigma(v) = \frac{\int_a^b v\,\theta dx}{\int_a^b \theta\,dx}.$$

Так как средние величины $\sigma(fg)$ и $\sigma(f)\sigma(g)$ однородны в нулевой степени относительно θ, то мы можем полагать $\int \theta\,dt = 1$.

По неравенствам Чебышева имеется свыше 1000 научных публикаций. Такое пристальное внимание к неравенствам Чебышева вызвано их многочисленными приложениями. Естественны вопрос «для каких еще классов функций, кроме монотонных, справедливы неравенства Чебышева» и задача «описать все измеримые функции, для которых справедливы неравенства Чебышева» – проблема Чебышева, связанная с интегральными неравенствами (см. [2–11]).

В настоящей работе мы даем описание всех измеримых функций, для которых справедливы неравенства Чебышева (критерий), приводим обобщения таких неравенств.

Это позволяет значительно расширить области приложения интегральных неравенств Чебышева.

3. Обозначения и основные понятия

Обозначим -мерным брус в $\mathbb{R}^n$ через $\Omega = \Omega_{a,b} = \{x : x \in \mathbb{R}^n, a_i \le x_i \le b_i,\ 1 \le i \le n\} = [a,b] = [a,b] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ – параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ (или промежуток), $\Omega_0 = \Omega_{0,\ell}$.

По теории квадратичных форм мы придерживаемся работы [1].

Определение 1. *Будем говорить, что измеримые на множестве Ω (или Ω_0) функции f и g синхронные на $\Omega(\Omega_0)$, если почти для всех $t,y \in \Omega(\Omega_0)$ выполняется неравенство*

$$\rho(t)p(t)[f(t)-f(y)][g(t)-g(y)] \ge 0, \tag{1}$$

и антисинхронными в случае обратного неравенства.

Здесь p – положительная интегрируемая на $\Omega(\Omega_0)$ весовая функция.

При $p \equiv 1$ и $g = x$, из [1] мы получаем неравенство

$$[f(t)-f(y)](t-y) \ge 0,$$

которое определяет монотонность функции f на $\Omega(\Omega_0)$. Тогда естественно неравенство

$$[f(t)-f(y)][g(t)-g(y)] \ge 0$$

понимать как монотонность функции f по функции g или как монотонность функции g по функции f. В этом случае мы будем иногда говорить, что функции f и g сомонотонны вместо синхронны и антимонотонны вместо антисинхронны.

Например, функция $f = 3\sin x + 5\sin^3 x$ не является монотонной на $(0,\infty)$. Однако функция f является монотонной по функции $g = \sin x + 2\sin^3 x - 4$ на $[0,\infty)$, иначе говоря, функции f и g в данном случае синхронны (сомнотонны) на $[0,\infty)$.

Определение 2. *Будем говорить, что измеримые на множестве Ω (или Ω_0) функции f и g почти синхронны на множестве $\Omega(\Omega_0)$, если существуют положительные постоянные $C_f > 0$ и $C_g > 0$ такие, что почти для всех $t,y \in \Omega(\Omega_0)$ выполняется неравенство*

$$p(t)p(y)[C_f f(t)-f(y)][C_g g(t)-g(y)]\geq 0,$$
и почти антисинхронными в случае обратного неравенства.

Очевидно, синхронные на $\Omega(\Omega_0)$ функции почти синхронны на $\Omega(\Omega_0)$.

Определение 3. *Измеримые на множестве Ω функции f и g будем называть интегрально синхронными на Ω, если квадратичная форма*

$$\psi(u,v)=\int_a^b\int_a^b p\,(t)p(y)[f(t)u-f(y)v][g(t)u-g(y)v]dtdy \qquad (2)$$

является неотрицательно определенной на Ω, и интегрально антисинхронными на Ω, если квадратичная форма

$$\bar{\psi}(u,v)=\int_a^b\int_a^b p\,(t)p(y)[f(t)u-f(y)v][g(y)u-g(t)v]dtdy$$

является неотрицательно определенной на Ω для всех u и v неравных совместно нулю.

Из свойств дополнительного члена R_n, которые были установлены Чебышевым, вытекает еще одно фундаментальное свойство типа устойчивости (или регулярности) интегральных неравенств Чебышева в следующем смысле:

Смысл знака дополнительного члена R_n не зависит от способа дробления интервала $\Omega_{a,b}$ на более мелкие подинтервалы $\Omega^q\subset\Omega_{a,b}$, $1\leq q\leq Q$ интервала $\Omega_{a,b}$. Смысл неравенств Чебышева на них сохраняются.

4. Основные результаты

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для того, чтобы для измеримых на множестве $\Omega_{a,b}$ функций f и g выполнялось условие устойчивости (регулярности) интегральных неравенств Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма*

$$\psi_{\alpha,\beta}(h)=\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta p\,(t)p(y)[f(t)u-f(y)v][g(t)u-g(y)v]dtdy=$$

$$=\sigma(fg)(\alpha,\beta)u^2-2\sigma(f)(\alpha,\beta)\sigma(g)(\alpha,\beta)uv+\sigma(fg)(\alpha,\beta)v^2$$

была знакоопределенной (полуопределенной) на всех подмножествах $\Omega_{\alpha,\beta}\subset\Omega_{a,b}$, $\alpha\geq a$, $\beta\leq b$ и для всех $h(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $h\neq 0$.

Доказательство. Развернем квадратичную форму (2), приведем подобные члены и перейдем к средним величинам $\sigma(fg)_{a,b}$ и $\sigma(f)_{a,b}\sigma(g)_{a,b}$. Тогда с учетом выбора $\int p\,dt=1$ получаем

$$\psi(u,v)_{a,b}=\sigma(fg)_{a,b}u^2-2\sigma(f)_{a,b}\sigma(g)_{a,b}uv+\sigma(fg)_{a,b}v^2.$$

Рассмотрим несингулярное (невырожденное) линейное преобразование

$$h=Th', h=h(u,v), h'=h'(u',v')$$

квадратичной формы $\psi(h)$, с коэффициентами, определенными на интервале $\Omega_{a,b}=[a,b]$, в квадратичную форму

$$\tilde{\psi}(h')_{\alpha,\beta}=\sigma(fg)_{\alpha,\beta}u^2-2\sigma(f)_{\alpha,\beta}\sigma(g)_{\alpha,\beta}uv+\sigma(fg)_{\alpha,\beta}v^2$$

с коэффициентами, определенными на произвольном подинтервале $\Omega_{\alpha,\beta}=[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. Матрицы квадратичных форм $\psi(h)$ и $\bar{\psi}(h')$

$$M_\psi=\begin{pmatrix}\sigma(fg)_{a,b} & -\sigma(f)_{a,b}\sigma(g)_{a,b}\\ -\sigma(f)_{a,b}\sigma(g)_{a,b} & \sigma(f)_{a,b}\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{M}_{\tilde{\psi}}=\begin{pmatrix}\sigma(fg)_{\alpha,\beta} & -\sigma(f)_{\alpha,\beta}\sigma(g)_{\alpha,\beta}\\ -\sigma(f)_{\alpha,\beta}\sigma(g)_{\alpha,\beta} & \sigma(f)_{\alpha,\beta}\end{pmatrix},$$

как известно, связаны соотношением:

$$\widetilde{M}_{\tilde{\psi}}=T'MT. \qquad (3)$$

Эта формула (3) выражает матрицу $\widetilde{M}_{\tilde{\psi}}$ коэффициентов преобразованной формы $\tilde{\psi}(h')_{\alpha,\beta}$ через матрицу M_ψ коэффициентов первоначальной формы $\psi(h)_{\alpha,\beta}$ и матрицу несингулярного преобразования T.

Из формулы (3) следует, что $det(\widetilde{M}) = det(M)[det(T)]^2$.

Тогда в силу (3) имеем, что квадратичные формы $\psi(h)_{a,b}$ и $\tilde{\psi}(h')_{a,b}$ конгруэнтны. Это значит, что они имеют равные ранги и равные сигнатуры.

Таким образом, из знакоопределенности одной из форм $\psi(h)_{a,b}$, $\tilde{\psi}(h')_{a,b}$ следует знакоопределенность того же смысла другой и обратно.

Лемма 2. *Для того, чтобы для функций f и g на множестве $\Omega_{a,b}$ выполнялось условие типа устойчивости неравенств Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы определитель Якоби системы функций средних величин $\sigma(fg)(x,y)$и $\sigma(fg)(x,y)\cdot\sigma(g)(x,y)$ двух переменных x и y ни в какой сплошной части множества $\Omega_{a,b}$ в нуль не обращался.*

Доказательство вытекает из леммы 1. Например, для классов монотонных функций, синхронных функций лемма проверяется непосредственно.

Очевидно, для функций $f = sinx$ и $g = cosx$ неравенства Чебышева неустойчивы.

В дальнейшем, называя некоторое неравенство неравенством Чебышева, мы всегда будем предполагать свойство типа устойчивости (регулярности) для него выполненным.

Рассмотрим вначале случай строгих неравенств в неравенствах Чебышева.

Теорема 3. *Для того, чтобы для измеримых на множестве Ω функций f и g выполнялись прямые (обратные) неравенства Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы функции f и g были интегрально синхронны (антисинхронны) на Ω.*

Доказательство. Прямые неравенства. *Достаточность.*

Пусть функции f и g интегрально синхронны на $\Omega_{a,b}$. Тогда квадратичная форма (2) является положительно определенной на Ω для всех u и v совместно неравных нулю.

Развернем квадратичную форму, приведем подобные члены и перейдем к средним величинам $\sigma(fg)$ и $\sigma(f)\sigma(g)$. Тогда с учетом выбора $\int pdt = 1$, получаем

$$\psi(u,v) = \sigma(fg)u^2 - 2\sigma(f)\sigma(g)uv + \sigma(fg)v^2.$$

Так как квадратичная форма является однородной функцией, относительно u и v, то мы можем при исследовании значений, принимаемых квадратичной формой, ограничиться рассмотрением ее значений на окружности единичного радиуса $u^2 + v^2 = 1$.

Если квадратичная форма $\psi(u,v)$ положительна для всех неотривиальных значений $h = h(u,v)$, то мы должны иметь, что

$$\min_{u^2+v^2=1} \psi(u,v) > 0. \qquad (4)$$

Для исследования проблемы воспользуемся методом множителей Лагранжа (см. [1]). Исследуем форму.

$$P(u,v) = \psi(u,v) - \lambda(u^2 + v^2).$$

Из равенств $\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial v} = 0$ имеем

$$\begin{cases} \sigma(fg)u - \sigma(f)\sigma(g)v - \lambda u = 0 \\ -\sigma(f)\sigma(g)u + \sigma(fg)v - \lambda v = 0. \end{cases} \qquad (4')$$

Для того, чтобы эта однородная система имела нетривиальные решения, множитель Лагранжа λ должен удовлетворять характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} \sigma(fg) - \lambda - \sigma(f)\sigma(g) \\ -\sigma(f)\sigma(g)\sigma(fg) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 2\sigma(fg)\lambda + [\sigma(fg)]^2 - [\sigma(f)\sigma(g)]^2 = 0. \qquad (5)$$

Дискриминант этого уравнения неотрицателен:

$$[\sigma(fg)]^2 - ([\sigma(fg)]^2 - [\sigma(f)\sigma(g)]^2) = [\sigma(f)\sigma(g)]^2,$$

уравнение имеет два различных действительных корня, так как $\sigma(f)\sigma(g) \neq 0$.

$$\lambda_1 = \sigma(fg) - |\sigma(f)\sigma(g)|, \quad \lambda_2 = \sigma(fg) + |\sigma(f)\sigma(g)|.$$

Используем лишь одно из уравнений системы (4'), например,

$$[\sigma(fg) - \lambda_1]u = \sigma(f)\sigma(g)v,$$

найдем частные решения уравнения, нормируя их условием $u^2 + v^2 = 1$

$$u_1 = \frac{\sigma(f)\sigma(g)}{\sqrt{[\sigma(f)\sigma(g)]^2 + (\sigma(fg) - \lambda_1)^2}} \qquad v_1 = \frac{\sigma(fg) - \lambda_1}{\sqrt{[\sigma(fg)]^2 + [\sigma(fg) - \lambda_1]^2}}. \tag{6}$$

Заменим в равенствах (6) λ_1 на λ_2, получаем решения u_2, v_2.

Найдем значения квадратичной формы $\psi(u, v)$ в точках (u_i, v_i), $i = 1,2$, следующими рассуждениями:

Так как квадратичная форма $\psi(u, v)$ однородная функция второго порядка, то имеем:

$$u\frac{\partial\psi}{\partial u} + v\frac{\partial\psi}{\partial v} = 2\psi(u, v).$$

Если в этом равенстве учесть, что $u_i^2 + v_i^2 = 1$, $i = 1,2$, то получаем:

$$\lambda_1 = \sigma(fg)u_1^2 - 2\sigma(f)\sigma(g)u_1v_1 + \sigma(fg)v_1^2$$
$$\lambda_2 = \sigma(fg)u_2^2 - 2\sigma(f)\sigma(g)u_2v_2 + \sigma(fg)v_2^2.$$

Таким образом, одно решение квадратного уравнения (5) дает минимальное значение, а другое – максимальное значение формы $\psi(h)$ на окружности $u^2 + v^2 = 1$.

Так как $\lambda_1 < \lambda_2$ и квадратичная форма $\psi(h)$ положительно определенная, то в силу (4) получаем:

$$min_{u^2+v^2=1}\psi(u, v) = \lambda_1 = \sigma(fg) - |\sigma(f)\sigma(g)| > 0,$$

откуда получаем

$$\sigma(fg) > |\sigma(f)\sigma(g)|$$

прямое неравенство Чебышева.

Необходимость.

Пусть выполнено прямое неравенство Чебышева

$$\sigma(fg) > |\sigma(f)\sigma(g)|. \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\sigma(fg) > 0$ и неравенства

$$\sigma(fg) - \sigma(f)\sigma(g) > 0$$
$$\sigma(fg) + \sigma(f)\sigma(g) > 0, \tag{8}$$

откуда получаем:

$$[\sigma(fg)]^2 - [\sigma(f)\sigma(g)]^2 \geq 0$$

Составим следующую матрицу второго порядка с коэффициентами $\sigma(fg)$, $\sigma(f)\sigma(g)$:

$$M = \begin{pmatrix} \sigma(fg) & -\sigma(f)\sigma(g) \\ -\sigma(f)\sigma(g) & \sigma(fg) \end{pmatrix}.$$

Из формул (7) и (8) следует, что все три главных минора этой матрицы положительны.

Тогда в силу критерия [1] о положительной определенности квадратичной формы, соответствующей этой матрице, форма является положительно определенной на $\Omega_{a,b}$ для всех u и v совместно неравных нулю.

Откуда следует, что функция f и g интегрально синхронны на $\Omega_{a,b}$. Обратные неравенства теоремы доказываются по той же схеме.

5. Обобщенные неравенства типа Чебышева

Неравенства Чебышева могут быть обобщены в самых различных направлениях. Здесь мы рассматриваем наиболее простой вариант обобщения, когда средние величины $\sigma(fg)$ и $\sigma(f)\sigma(g)$ сравниваются, взятыми с некоторыми положительными постоянными коэффициентами.

Определение 4. Будем говорить, что измеримые на брусе $\Omega_{a,b}$ функции f и g почти интегрально синхронны на брусе $\Omega_{a,b}$, если существуют постоянные $C_f > 0$,

$C_g > 0$ такие, что квадратичная форма

$$\psi_C(h) = \int_a^b \int_a^b p(t)p(y)[C_f f(t)u - f(y)v][C_g g(t)u - g(y)v]dtdy \qquad (9)$$

является положительно определенной, и соответственно почти интегрально антисинхронны, если квадратичная форма

$$\overline{\psi_C}(h) = \int_a^b \int_a^b p(t)p(y)[C_f f(t)u - f(y)v][C_g g(t)u - g(y)v]dtdy \qquad (10)$$

является положительно определенной для всех нетривиальных $h = h(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 4. *Для того, чтобы для измеримых на брусе функций* f *и* g *выполнялись прямые (соответственно обратные) обобщенные неравенства Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы функции* f *и* g *были почти интегрально синхронны (соответственно почти интегрально антисинхронны).*

Доказательство. Прямые неравенства Чебышева. Достаточность. Пусть функции f и g почти интегрально синхронны. Тогда существуют постоянные $C_f > 0$ и $C_g > 0$ такие, что квадратичная форма (9) является положительно определенной для всех нетривиальных $h = \mathbb{R}^n$.

Развернем квадратичную форму (9), приведем подобные, перейдем к средним величинам $\sigma(fg)$, $\sigma(f)\sigma(g)$ и с учетом $\int pdt = 1$, получим

$$\psi_C(h) = C_f C_g \sigma(fg)u^2 - (C_f + C_g)\sigma(f)\sigma(g)uv + \sigma(fg)v^2. \qquad (11)$$

Очевидно форма (11) конгруэнтна форме (9), значит положительно определенная. Тогда для квадратичной формы (11) имеет место соотношение

$$min_{u^2+v^2=1}\psi_C(u,v) > 0. \qquad (12)$$

Решаем эту вариационную задачу методом множителей Лагранжа. Рассмотрим квадратичную форму

$$P_C(u,v) = \psi_C(u,v) - \lambda(u^2 + v^2).$$

Равенства

$$\frac{\partial P_C}{\partial u} = \frac{\partial P_C}{\partial v} = 0$$

определяют систему уравнений

$$\begin{cases} C_f C_g \sigma(fg)u - \dfrac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)\sigma(g)v - \lambda u = 0 \\ -\dfrac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)\sigma(g)u + \sigma(fg)v - \lambda v = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Для того, чтобы эта однородная система имела нетривиальные решения, множитель Лагранжа λ должен удовлетворять характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} C_f C_g \sigma(fg) - \lambda & -\dfrac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)\sigma(g) \\ -\dfrac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)\sigma(g) & \sigma(fg) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - (C_f C_g + 1)\sigma(fg)\lambda + C_f C_g[\sigma(fg)]^2 - \left[\frac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)\sigma(g)\right]^2 = 0.$$

Дискриминант положителен:

$$D = (C_f C_g - 1)^2[\sigma(fg)]^2 + (C_f + C_g)^2[\sigma(f)\sigma(g)]^2 > 0,$$

корни λ_1 и λ_2 различны:

$$\lambda_{1,2} = (C_f C_g + 1)\sigma(fg) \mp \sqrt{(C_f C_g - 1)^2[\sigma(fg)]^2 + (C_f + C_g)^2[\sigma(f)\sigma(g)]^2}. \qquad (14)$$

Так как $\sigma(fg) > 0$ в силу положительности формы, то $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, причем $\lambda_1 < \lambda_2$.

Тогда в силу известного равенства

$$u\frac{\partial\psi_C}{\partial u}+v\frac{\partial\psi_C}{\partial u}=2\psi_C(u,v)$$

в силу однородности $\psi_C(u,v)$ степени 2, нормируя решения условием $u^2+v^2=1$, получаем, что

$$\lambda_1=\psi_C(u_1,v_1),\quad \lambda_2=\psi_C(u_2,v_2), \tag{14'}$$

где u_1 и v_1 решения системы (13), соответствующие собственному числу λ_1, u_2,v_2 – решения системы (13), соответствующие корню λ_2. Из равенств (14') следует, что λ_1 есть минимальное значение формы $\psi_C(h)$ на окружности $u^2+v^2=1$, а λ_2 – максимальное значение формы на $u^2+v^2=1$. В силу условия, что $\lambda_1>0$, или из (14) после простейших преобразований с учетом $\sigma(fg)>0$, получим

$$\sigma(fg)>\frac{C_f+C_g}{2\sqrt{C_fC_g}}|\sigma(f)\sigma(g)|=A|\sigma(f)\sigma(g)|$$

прямые неравенства Чебышева.

Необходимость.

Пусть выполнены прямые неравенства Чебышева

$$\sigma(fg)>A|\sigma(f)\sigma(g)|,\quad A>0. \tag{15}$$

Из неравенства (15) имеем, что $\sigma(fg)>0$

$$[\sigma(fg)]^2-A^2[\sigma(f)\sigma(g)]^2>0.$$

Найдем числа C_f и C_g (пока неопределенные) так, чтобы

$$\frac{C_f+C_g}{2\sqrt{C_fC_g}}=A. \tag{16}$$

Обозначим $C_f=x^2$, $C_g=y^2$. Тогда из (16) имеем

$$x^2-2Axy+y^2=0. \tag{17}$$

Остается найти нужные нам решения этого уравнения, если таковые имеются. Левая часть равенства (17) представляет собой квадратичную форму $\phi(x,y)=x^2-2Axy+y^2$ с переменными x и y. Матрица коэффициентов этой квадратичной формы имеет вид

$$M_\phi=\begin{pmatrix}1 & -A\\ -A & 1\end{pmatrix}.$$

Так как два главных минора $\Delta_{ll}=\Delta_{22}=1>0$ положительны, то если главный минор Δ

$$\Delta=detM=\begin{vmatrix}1 & -A\\ -A & 1\end{vmatrix}=1-A^2$$

положителен, то квадратичная форма $\phi(x,y)$ положительно определенная и равна нулю только тогда, когда $x=0$ и $y=0$, то есть уравнение (17) имеет в этом случае лишь тривиальные решения $x=0,y=0$. Но нас интересуют нетривиальные решения. Это означает, что квадратичная форма $\phi(x,y)$ должна быть неопределенной или полуопределенной. Это возможно только при условии, что

$$\Delta=detM=1-A^2\leq 0.$$

Рассмотрим случай $1-A^2=0$, откуда имеем, что $A=1$. Случай $A=-1$ не подходит, так как по смыслу $A>0$.

В этом случае получаем

$$\phi(x,y)=(x-y)^2=0,$$

откуда имеем $x=y$.

Квадратичная форма $\phi(x,y)$ выражает две совпадающие прямые, проходящие через начало координат. Мы получаем равенство $x=y$.

Вместо x и y могут быть взяты любые равные между собой числа (в данном случае положительные $x>0,y>0$). Пусть теперь имеем случай, когда $1-A^2<0$. В этом случае квадратичная форма может быть разложена на множители

$$\phi(x,y) = \left(x - Ay - \left(\sqrt{A^2-1}\right)y\right)\left(x - Ay + \left(\sqrt{A^2-1}\right)y\right),$$

если $\phi(x,y) = 0$, то получаем две прямые проходящие через начало координат:

$$x - Ay - (\sqrt{A^2-1})y = 0 \quad \text{и} \quad x - Ay + (\sqrt{A^2-1})y = 0. \tag{18}$$

Так как $A > \sqrt{A^2-1}$ при $A > 0$, то решения любого из этих уравнений удовлетворяют нашим условиям и их квадраты могут быть взяты в качестве коэффициентов $C_f = x^2$, $C_g = y^2$ почти интегральной синхронности функций f и g.

Возьмем первое уравнение. Пусть y – любое положительное число. Тогда $x = (A + \sqrt{A^2-1})y$. $C_f = (A + \sqrt{A^2-1})^2 y^2$, $C_g = y^2$. Нетрудно проверить, что C_f и C_g удовлетворяют равенству $C_f C_g = 2\sqrt{C_g C_g} A$

Каждое из уравнений (18) имеет бесчисленное множество решений, полученное с условиями $A > 1$ и $x \cdot y > 0$ удовлетворяют поставленной задачи.

Пусть найдены требуемые $C_f > 0$, $C_g > 0$. Покажем теперь, что найденные значения C_f и C_g обеспечивают почти интегральную синхронность рассматриваемых фунцкий f и g на $\Omega_{a,b}$.

Подставим C_f и C_g вместо A в неравенство (15), имеем

$$\sigma(fg) \geq \frac{C_f + C_g}{2\sqrt{C_f C_g}} |\sigma(f)\sigma(g)|.$$

Откуда получаем, что $\sigma(fg) \geq 0$ и

$$[\sigma(fg)]^2 - \left[\frac{C_f + C_g}{2\sqrt{C_f C_g}} \sigma(f)\sigma(g)\right]^2 \geq 0$$

или

$$\left[\sqrt{C_f C_g}\sigma(fg)\right]^2 - \left[\frac{C_f + C_g}{2\sqrt{C_f C_g}} \sigma(f)\sigma(g)\right]^2 \geq 0.$$

Это можно записать так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_f C_g \sigma(fg) & -\frac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)(g) \\ -\frac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)(g) & \sigma(fg) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} C_f C_g \sigma(fg) & -\frac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)(g) \\ -\frac{C_f + C_g}{2}\sigma(f)(g) & \sigma(fg) \end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует квадратичная форма

$$\psi_C(u,v) = C_f C_g \sigma(fg) u^2 - \left(C_f + C_g\right)\sigma(f)\sigma(g) uv + \sigma(fg) v^2.$$

Из того, что $\sigma(fg) > 0$ и $\Delta > 0$, имеем, что квадратичная форма $\psi_C(u,v)$ является положительно определенной.

Перейдем от средних величины к интегралам, путем обратных преобразований получим

$$\psi_C(u,v) = \int_a^b \int_a^b p(t)p(y)[\,C_f f(t)u - f(y)v]\left[C_g g(t)u - g(y)v\right] dt dy.$$

Так как $\psi_C(u,v)$ неотрицательно определенная, то функции fи gпочти интегрально синхронны с коэффициентами $C_f > 0$ и $C_g > 0$. Случай почти интегральной антисинхронности рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Равенства в неравенствах Чебышева имеют место, лишь когда одна или обе функции f, g постоянны.

6. Дискретный аналог неравенств Чебышева

Дискретный аналог неравенств Чебышева был дан многими математиками. В [4] дискретный аналог неравенствам Чебышева дается для синхронных (одинаково упорядоченных) последовательностей a и b, т.е. для которых

$$(a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \geq 0.$$

В связи с вопросами теории вероятностей дискретный аналог неравенств рассматривается в работах многих авторов [9 и др.].

В данной работе мы получили полное описание всех последовательностей, для которых справедливы неравенства Чебышева.

6.1. Обозначения и основные понятия

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будем обозначать (a).

В основном мы будем иметь дело с многомерными последовательностями $m \in N^n$, $N^n = N \times \ldots \times N$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $1 = (1, \ldots, 1)$, $j = (j_1, \ldots, j_n)$, $\sum_{j=1}^{m} = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{m_n}$.

Взвешенные средние величины будем обозначать

$$\sigma(a) = \sigma(a, p) = \frac{\sum a\,p}{\sum p}, \quad \sigma(ab) = \sigma(ab, p) = \frac{\sum a\,bp}{\sum p}.$$

Определение 5. Последовательности (a) и (b) называются суммарно синхронными, если квадратичная форма

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p_j\, p_k (a_j u - a_k v)(b_j u - b_k v), \quad m \in N^n$$

является положительно определенной, и суммарно антисинхронной, если квадратичная форма $\sum_{j=1} \sum_{k=1} p_j p_k \left[a_j u - a_k v\right]\left[b_j u - b_k v\right]$, $m \in N^n$ является положительно определенной для всех $h \neq 0$, $h \in R^2$.

Теорема 5. *Для того, чтобы последовательности (a) и (b) удовлетворяли прямым (обратным) неравенствам Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы последовательности (a) и (b) были суммарно синхронны (суммарно антисинхронны).*

Доказательство проводится почти по схеме доказательства континуального варианта.

6.2. Дискретный аналог обобщения неравенств Чебышева

Определение 6. *Обобщениями неравенств Чебышева для последовательностей (a) и (b) мы будем называть неравенства, которые выполняются между средними $\sigma(ab)$ и $\sigma(a) \cdot \sigma(b)$ с некоторыми положительными коэффициентами перед $\sigma(ab)$ и $\sigma(a)\sigma(b)$, которые могут равняться единице.*

Лемма 6. Условия почти синхронности последовательностей (a) и (b) не являются необходимыми ни для каких классов почти синхронных последовательностей.

Определение 7. *Последовательности (a) и (b) называются почти суммарно синхронными (соответственно антисинхронными), если существуют постоянные $C_a > 0$ и $C_b > 0$ такие, что для всех $m \in N^n$* квадратичная форма

$$\varphi(h) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p_j\, p_k (C_a a_j - a_k)(C_b b_j - b_k) \geq 0, \quad m \in N^n, h \in R^2$$

является положительно определенной, и почти суммарно антисинхронными, если квадратичная форма $\overline{\psi}(h) = \sum\sum p_j p_k \left[C_f a_j u - a_k v\right]\left[C_g b_k u - b_j v\right]$ является положительно определенной для всех $h \neq 0, n \in R^2$.

Теорема 7. *Для того, чтобы последовательности (a) и (b) удовлетворяли прямым (обратным) неравенствам Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы последовательности (a) и (b) были почти суммарно синхроны (суммарно антисинхронны).*

Теорема доказывается по той же схеме, что и в случае интегралов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 080100441.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1954. 492 с.
2. *Коркин А.Н.* Comptes rendus. XCVI. 1883. № 5. С. 326.
3. *Чебышев П.Л.* О приближенных выражениях одних интегралов через другие, взятые в тех же пределах // Сообщ. и проток. зас. Мат. о-ва при Харьковск. Имп. Ун-те. II. 1882. С. 93–98.
4. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Гос. изд-во иностр. литер., 1948. 456 с.
5. *Armstrong T.E.* Chebushev inequalities and comonotonicity // Real Analysis Exchange. 1993/94. Vol. 19. N 1. P. 266–268.
6. *Franklin F.* Proof of a theorem of Tschebyscheff's on definite integrals // American Journ. of Math. 1885. Vol. 7. P. 377–379.
7. *Heining H.* and *Maligranda L.* Chebyshev inequality in function spaces // Real Analysis Exchange. 1991–1992. Vol. 17. P. 211–247.
8. *Hermite C.* Cours de la Faculte des Science de Paris. Paris, 1888.
9. *Jensen J.L.W.V.* Sur une generalisation d'une formule de Tchebycheff // Bull. des Sci. Math. 1888. Vol. 2. Is. 12. P. 134–135.
10. *Pecaric J., Peric I.* Identities for Chebyshev functional involving derivatives of arbitrary order and applications // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 313. P. 475–483.
11. *Wagener A.* Chebyshev's algebraic inequality and comparative statics under uncertainty // University of Vienna. 2005. P. 1–11.
12. *Yakubov A.Ya., Shankishvili L.D.* Some inequalities for convolution integral transform // Integral Transforms and Special Functions. 1994. Vol. 2. N 1. P. 65–76.

Поступила в редакцию 24.06.2011 г.
Принята к печати 23.12.2011 г.